

# 数 学

(問 題)

(96 理工)

## 注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は 4 ～ 6 ページに記載されている。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄に黒鉛筆（HB）で記入すること。
4. 受験番号および氏名は各解答用紙の所定欄（それぞれ 2 か所）に記入すること。
5. 下書きは問題冊子の余白を使用すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

(I)

関数  $y(t)$  は等式

$$y(t) = \int_0^t e^{-a(t-s)} y(s) ds + 1 \quad \dots\dots (*)$$

をみたすものとする. ただし,  $a$  は定数である. 次の各問に答えよ.

- (1)  $(*)$  を微分することにより,  $y(t)$  がみたす微分方程式を求めよ.
- (2)  $y(t)$  を求めよ.

(II)

円  $x^2 + y^2 = 1$  上の点  $P = (\cos \theta, \sin \theta)$  について  $f(P) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$  とする.  $0 \leq \alpha \leq \pi$  なる  $\alpha$  に対して  $P_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $P_{n+1} = f(P_n)$  により, 点の列  $P_0, P_1, P_2, \dots\dots$  を定める. また,  $A = (1, 0)$  とおく. 次の各問に答えよ.

- (1)  $\overline{P_1 A} \geq \sqrt{3}$  となる  $\alpha$  の範囲を求めよ.
- (2) 初めて  $\overline{P_n A} \geq \sqrt{3}$  となる  $n (n \geq 0)$  の値が 2 である  $\alpha$  の範囲を求めよ.
- (3)  $\alpha \neq 0$  のとき,  $\overline{P_n A} \geq \sqrt{3}$  となる  $n (n \geq 0)$  が存在することを示せ.

## (Ⅲ)

A と B の二人が以下のゲームを行なう.

表の出る確率が  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 裏の出る確率が  $q = 1 - p$  のコインを続けて投げる. 一回投げるごとに, 表が出れば A が 1 点を, 裏が出れば B が 1 点を得るものとする. 0 対 0 から始めて, 先に 2 点多く得た方が勝ちとする.

A, B の得点が  $i$  対  $j$  の時点で A が勝つ確率を  $K(i, j)$  とする. たとえば,  $K(3, 1) = 1$ ,  $K(1, 3) = 0$  である. 次の各問に答えよ.

- (1)  $|i - j| \leq 1$  のとき,  $K(i, j)$  を  $K(i, j+1)$  と  $K(i+1, j)$  を用いて表わせ.
- (2)  $K(1, 1)$  を求めよ.
- (3)  $a = \frac{p}{q}$  とおくとき,  $K(0, 1)$  を  $a$  を用いて表わせ.
- (4) (3) において,  $K(0, 1) > \frac{1}{2}$  をみたす  $a$  の値のうち最小の自然数を求めよ.

## (Ⅳ)

C を放物線  $y = x^2 + 1$  とする. 次の各問に答えよ.

- (1) 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が定める 1 次変換により, C の各点が放物線  $D: y = (x - 1)^2$  にうつされる. この行列 A を求めよ.
- (2) 実数  $p, q$  に対して E を放物線  $y = (x - p)^2 + q$  とする. 逆行列をもつ適当な行列が定める 1 次変換により, C の各点が E にうつされるための,  $p$  と  $q$  についての条件を求めよ.

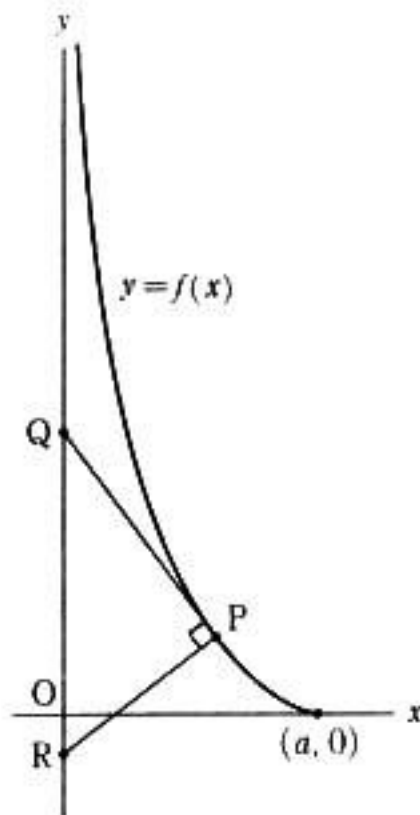
(V)

図の曲線  $C$  は  $0 < x \leq a$  における関数  $y=f(x)$  のグラフである. ただし,  $a$  は定数とし,  $f(x) \geq 0$ ,  $f(a) = 0$  とする. さらに,  $C$  上の各点  $P = (x, y)$  における接線と  $y$  軸の交点を  $Q$  とするとき,

$$\overline{PQ} = a$$

であるとする.

(1)  $\frac{dy}{dx}$  を  $x$  と  $a$  を用いて表わせ.



$C$  上を動く点  $\vec{p}(t) = (x(t), y(t))$  が,

$$|\vec{p}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 1 \quad \text{および} \quad x'(t) < 0$$

をみたすとする.  $x < a$  のとき次の間に答えよ.

(2)  $\vec{p}(t) = (x, y)$  のとき, 加速度の大きさ  $|\vec{p}''(t)|$  が  $\frac{x}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$  に等しいことを示せ.

(3)  $C$  の  $P$  における法線と  $y$  軸の交点を  $R$  とするとき,  $\overline{PR}$  と  $|\vec{p}''(t)|$  の比が一定であることを示せ.