

数 学

(問 題)

(96 政経)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は2～3ページに記載されている。
3. 問1、問2、問3の全問を解答せよ。
4. 解答はすべて解答用紙の所定の欄に黒鉛筆（HB）で記入すること。
コンパス、定規は使用してもよい。
5. 受験番号および氏名は解答用紙の所定の欄（2か所）に記入すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

問1 下の各問にあてはまる数値を解答欄に記入せよ。

放物線

$$(A) \quad y = ax^2 - 2x + b$$

と直線

$$(B) \quad y = 3ax + 3b$$

がある。ただし、 a, b は定数で $a \neq 0$ とする。 (B) は点 $P(a, a-2)$ で (A) に接する。 (B) と y 軸との交点から (A) に引いたもう一つの接線を ℓ とする。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) ℓ の傾き m および ℓ と (A) の接点の x 座標 c を求めよ。
- (3) 放物線 (A) と直線 (B) および ℓ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

問2 $x-y$ 平面において、 x 座標、 y 座標が共に整数である点 (x, y) を格子点という。いま、互いに異なる5個の格子点を任意に選ぶと、その中に次の性質をもつ格子点が少なくとも一対は存在することを示せ。

一対の格子点を結ぶ線分の中点がまた格子点となる。

問3 行列 E_1, E_2, E_3, E_4 を次のように定義する。

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、次の問に答えよ。

- (1) x_1, x_2, x_3, x_4 を実数として

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4$$

とかくとき、 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ（答のみ解答欄に記せ）。

- (2) 行列 $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ に対して, 演算 $*$ を

$$A_1 * A_2 = \text{tr}(A_1 {}^t A_2)$$

と定義する。ここに, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき,

$$\text{tr}(A) = a + d, \quad {}^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

である。

このとき, $A_1 * A_2$ を a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2$) を用いて表せ
(答のみ解答欄に記せ)。

- (3) $E_i * E_j$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) の値を右の例を参考にして, 解答欄の表に記入せよ。

E_j		E_3	
E_1			
E_2		$E_2 * E_3$	

- (4) x, y が実数のとき, 関係式

$$(xA + yB) * C = x(A * C) + y(B * C)$$

が成立することに注意して, 次のことを証明せよ。

任意の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を

$$A = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4$$

と表せば, x_1, x_2, x_3, x_4 は一通りに決まる。