

数 学

(問 題)

(97 理工)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は4～7ページに記載されている。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄に黒鉛筆で記入すること。
4. 受験番号および氏名は各解答用紙の所定欄（2か所）に記入すること。
5. 下書きは問題冊子の余白を使用すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

I. 3 次方程式

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

について以下の問に答えよ.

- (i) $(*)$ の解で 1 より大きなものは, ただ 1 つであることを示せ.
- (ii) $(*)$ の解で 1 より大きなものを α とし, $\beta = \alpha^2 - 2$, $\gamma = \beta^2 - 2$ とする.
このとき, $\gamma < \beta < \alpha$ となることを示せ.
- (iii) β, γ は $(*)$ の解であることを示せ.

II. 正の整数 p ごとに数列 $a(n, p) (n = 1, 2, \dots)$ を次のように定める.

$$a(1, p) = \frac{1}{p},$$

$$a(n, p) = \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a(k, p) + n \right), \quad (n \geq 2)$$

このとき以下の問に答えよ.

- (i) 一般項 $a(n, p)$ を求めよ.
- (ii) 極限 $\lim_{p \rightarrow \infty} a\left(\left[\frac{p}{2}\right], p\right)$ を求めよ. ただし実数 x に対して $[x]$ は x を越えない最大の整数を表す.

Ⅲ. 数字 1, 2, 3 を n 個並べてできる n 桁の数全体を考える. そのうち 1 が奇数回現われるものの個数を a_n , 1 が偶数回現われるかまったく現われないものの個数を b_n とする. 以下の問に答えよ.

(i) a_{n+1} , b_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ.

(ii) a_n , b_n を求めよ.

IV. 3 辺の長さが a, b, c である三角形 T を考える. $a \geq b \geq c$ のとき 3 辺の長さが $\frac{a}{2}, b, c$ である三角形が存在するならば, T は「変形可能」ということにする.

以下の問に答えよ.

(i) $1 > x > y$ とする. 3 辺の長さが $1, x, y$ である三角形が存在し, かつその三角形が「変形可能」となる (x, y) の範囲を座標平面に図示せよ.

(ii) $1 > x > y > \frac{1}{2}$ とする. 3 辺の長さが $1, x, y$ である三角形は何度でも「変形可能」なことを示せ. つまり, この三角形は「変形可能」であり変形して得られた三角形もまた「変形可能」であり…となっていることを示せ.

V. 座標平面上の円

$$C: x^2 + y^2 = 9$$

の内側を半径1の円 D が滑らずに転がる. 時刻 t において D は点 $(3 \cos t, 3 \sin t)$ で C に接しているとする.

以下の問に答えよ.

- (i) 時刻 $t=0$ において点 $(3, 0)$ にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x(t), y(t))$ を求めよ. ただし $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ とする.
- (ii) $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ の範囲で点 P の描く曲線の長さを求めよ.