

数 学

(問 題)

(97 政経)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は2～3ページに記載されている。
3. 問1，問2，問3の全問を解答せよ。
4. 解答はすべて解答用紙の所定の欄に黒鉛筆（HB）で記入すること。
コンパス，定規は使用してもよい。
5. 受験番号および氏名は解答用紙の所定の欄（2か所）に記入すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

問1 次の空欄にあてはまる数値を解答欄に記入せよ。

点 $P(-2, a)$ と点 Q で交わる 2 曲線

$$y=f(x) = -x^2 + ax + b$$

$$y=g(x) = cx^2 - ax - c$$

があり、点 P における $y=f(x)$ の接線と $y=g(x)$ の接線は直交している。

このとき、 $a = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b = \boxed{\text{イ}}$ 、 $c = \boxed{\text{ウ}}$ であり、点 Q の x 座標は $x = \boxed{\text{エ}}$ となる。ただし、 $a < -2$ とする。

また、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が囲む図形の面積は $S = \boxed{\text{オ}}$ である。

問2 次の文を読み、(A) の空欄にあてはまる記号または式を解答欄に記入せよ。また (B) は証明せよ。

(A) 整数を係数とする n 次の方程式

$$(1) \quad x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

がある。ここで $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ はすべて整数である。

このとき、(1) が有理数の解をもつならば、その解は整数である。それは次のようにして証明される。

方程式 (1) が有理数 $x = \frac{p}{q}$ を解にもつとしよう。ただし、 p は整数、 q は正の整数で、互いに素とする。ここで互いに素であるとは、 p と q の最大公約数が 1 であることをいう。

$x = \frac{p}{q}$ を (1) に代入して整理すれば

$$p^n = \boxed{\text{ア}}$$

を得る。この式の右辺は $\boxed{\text{イ}}$ で割り切れるから、 $\boxed{\text{ウ}}$ も $\boxed{\text{エ}}$ で割り切れる。ところが、 p と q は互いに素であるから $\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ も互いに素である。ゆえに $\boxed{\text{キ}}$ でなければならない。ゆえに $\boxed{\text{ク}}$ となり、(1) の

解は整数である。

(B) 上の結果を利用して $\sqrt{7}$ は無理数であることを示せ。

問3 x, y を任意の正の数とし, p, q を

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{かつ} \quad p > 1, q > 1$$

をみたす有理数とする。このとき, 次の各問に答えよ。

(1) 不等式

$$(x + y)^2 \leq px^2 + qy^2$$

が成立することを示せ。また, 等号が成立するときの p, q を, x, y を用いて表せ。

(2) 必要ならば $x = x^{\frac{1}{p}} \cdot x^{\frac{1}{q}}$ 等を用いて, 次の不等式

$$(x + y)^{\frac{1}{p}} < x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}$$

を示せ。