

数 学

(問 題)

(98 教育)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は4～5ページに記載されている。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄に黒鉛筆（HB）で記入すること。
4. 受験番号および氏名は解答用紙の所定欄（2カ所）に記入すること。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

1 次の に当てはまる数または式を解答用紙の指定欄に記入せよ。

(1) 方程式 $\cos^{98} x - \sin^{98} x = 1$ の解は $x =$ イ である。

(2) 白玉が m 個、黒玉が n 個入っている袋がある。袋の中から玉を 1 個取り出して、それと同色の玉を r 個付け加えて袋に戻す操作を繰り返して行う。

3 回目に取り出した玉が黒玉である確率は ロ である。

(3) 自然数 n に対して整数 $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$ が次の規則によって、定められている。

$$a_{1,0} = 1, a_{1,1} = 2,$$

$n > 1$ のとき,

$$a_{n,0} = 1$$

$$a_{n,r} = a_{n-1,r-1} + a_{n-1,r} \quad (0 < r < n)$$

$$a_{n,n} = 2$$

次の問いに答えよ。

(i) $n \geq 2$ のとき、 $a_{n,2}$ の値は ハ である。

(ii) $n \geq 2$ のとき、 $a_{n,n-2}$ の値は ニ である。

2 $f(x) = e^{-x} \sin x$ とする。

(1) n は自然数とする。 $0 \leq x \leq n\pi$ の範囲で、曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積 $S(n)$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ を求めよ。

3

(1) 実数 $x \neq 0$ に対して $\left| x + \frac{1}{x} \right|$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) a, b を実数の定数とする。方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

が実数解を持たないとき、点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

4

(1) p, a を正の定数とし、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とする。点 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 1$ の上を動くとき、 $\sqrt{X^2 + Y^2}$ の最大値を A 、最小値を B とする。積 AB を求めよ。

(2) b を正の定数とする。点列 $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$ が次の関係

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たしている。点 P_0 が円 $x^2 + y^2 = 1$ の上を動くとき、点 P_n と原点との距離の最大値を A_n 、最小値を B_n とする。積 $A_n B_n$ を求めよ。

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) A_n B_n$ の和を求めよ。