

数 学

(問 題)

(98 理工)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は4～7ページに記載されている。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄に黒鉛筆で記入すること。
4. 受験番号および氏名は各解答用紙の所定欄（2か所）に記入すること。
5. 下書きは問題冊子の余白を使用すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

I. 関数の列

$$f_n(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^n ((k+2)\cos^{k+1} t - k\cos^{k-1} t) \sin t \, dt \quad (n=1, 2, \dots)$$

について、次の問に答えよ.

(i) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (f(x) - f(2\pi))$ を求めよ.

II. 2つの双曲線

$$C: x^2 - y^2 = 1$$

$$D: x^2 - y^2 = -1$$

を考える. C 上の点 $P(a, b)$ ($a > 0$) に対して, C の P における接線と D との 2 交点を Q, Q' とする. そして, D の Q における接線と D の Q' における接線との交点を R とする. このように点 P に対して点 R を対応させる. 点 P が C の $x > 0$ の部分を動くとき, 点 R の軌跡を求めよ.

Ⅲ. 良品の西瓜^{すいか}を1個, A店またはB店で買う.

A店では買う際に良品か不良品かを割って調べることができ, B店には不良品はないことがわかっている.

次の2つの方法を考える:

方法Ⅰ: A店で良品が得られるまで割って調べ, 良品が得られたら, それを買う. ただし, n 個 ($n \geq 1$) 割っても良品が得られないときは, B店で買う.

方法Ⅱ: A店で割らずに1個買う. もし, それが不良品だったならば, B店へ行って買う.

ただし A店では割った西瓜は買う買わないにかかわらず1個につき, 不良品であった場合は a 円, 良品であった場合は b 円支払う. また割らずに買う場合は1個につき b 円支払う. B店の西瓜は1個 c 円である.

今, $a < b < c$ とし, A店の西瓜が不良品である確率を p ($0 < p < 1$), 良品である確率を $q = 1 - p$ とする. また, 方法Ⅰで支払う金額の期待値を U_n , 方法Ⅱで支払う金額の期待値を V とする. このとき, 次の問に答えよ.

(i) U_1 と V とではどちらが大きい.

(ii) $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ を求めよ. 必要ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} np^n = 0$ を証明せずに用いてもよい.

(iii) $U > V$ となる p の範囲を求めよ.

IV. 座標平面上に、原点 O を中心とした、半径 1 の円がある。この円周上に、異なる 3 点 $A(1, 0)$, B , C をとり、 $\alpha = \angle AOB$, $\beta = \angle AOC$ とおく。ただし、角度は OA から正の向きにはかるものとする。

3 点 A , B , C を、原点を中心に角度 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) だけ正の向きに回転させた点の x 座標をそれぞれ $a(\theta)$, $b(\theta)$, $c(\theta)$ とおく。

このとき次の問に答えよ。

(i) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$ のとき、 $a(\theta) > c(\theta) > b(\theta)$ となる θ の範囲を求めよ。

(ii) $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ のとき、 $c(\theta) > b(\theta) > a(\theta)$ となる θ の範囲を求めよ。

V. 放物線 $C: y = \frac{x^2}{2}$ とその焦点 $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を考える. このとき次の問に答えよ.

(i) C 上の点 $P(u, v)$ ($u > 0$) における C の接線 ℓ と x 軸との交点を T とする. 線分 PT と線分 FT は直交することを示せ.

(ii) 線分 FT の長さを求めよ.

(iii) $\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{1+x^2})$ を求めよ.

(iv) 放物線 C の, $x=0$ から $x=u$ までの長さを $s(u)$ とする. また, 点 P からの距離が $s(u)$ となる ℓ 上の点のうちで, T に近い方の点を Q とする. このとき, 線分 QT の長さを求めよ.

(v) C が x 軸に接しながら, すべらないように右の方に傾いていくとき, 焦点 F の軌跡を求めよ.