

数 学

(問 題)

(99 理工)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は4～6ページに記載されている。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄に黒鉛筆で記入すること。
4. 受験番号および氏名は各解答用紙の所定欄（2か所）に記入すること。
5. 下書きは問題冊子の余白を使用すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

I. 関数

$$f(x) = x \log \frac{x}{a} + (1-x) \log \frac{1-x}{1-a} - 2x^2 + 4ax \quad (0 < x < 1)$$

について、次の問に答えよ。ただし、 a は $0 < a < 1$ をみたす定数とする。

(i) $f'(a)$ の値を求めよ。

(ii) $f(x)$ の最小値を求めよ。

II. m を正の整数とするとき、次の等式をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = \cos(2mx) + \int_0^\pi f(t) |\cos t| dt$$

III. 次の問に答えよ.

(i) 複素数 z が, $|z-1|=1$ をみたすとき, 複素数平面上で

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

によって定まる点 w の軌跡を図示せよ.

(ii) (i) の w について $iw+3i-4$ の偏角 θ の範囲を求めよ.

ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

IV. 次の問に答えよ.

(i) $a+b \geq a^2-ab+b^2$ をみたす正の整数の組 (a, b) をすべて求めよ.

(ii) $a^3+b^3=p^3$ をみたす素数 p と正の整数 a, b は存在しないことを示せ.

V. n を正の整数とし、 $y = n - x^2$ で表されるグラフと x 軸とで囲まれる領域を考える。
この領域の内部および周に含まれ、 x, y 座標の値がともに整数である点の個数を $a(n)$ とする。次の問に答えよ。

(i) $a(5)$ を求めよ。

(ii) $\sqrt{n}$ をこえない最大の整数を k とする。 $a(n)$ を k と n の多項式で表せ。

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$ を求めよ。