数　学

（問　題）

（99　人科）

注　意　事　項

1．問題冊子および解答用紙は試験開始の合図があるまで開かないこと．

2．問題は問題冊子の第４ページと第５ページに記載されている．

3．受験番号（算用数字）と氏名は，指示に従ってただちに解答用紙の所定欄（２カ所）に記入し，それ以外に記入してはならない．

4．解答はすべて解答用紙の所定の欄に黒鉛筆（ＨＢ）で記入すること．

5．計算には問題冊子の余白を使用すること．

6．計算器を使用してはならない．

7．問題冊子は持ち帰ること．

8．試験終了時には解答用紙を裏返して机の上におき，指示を待つこと．

問1.　2個のさいころを何回か続けて投げて，2つのさいころがともに1の目が出たら勝ちとなるゲームでは，さいころを何回以上投げることにすれば，勝つ可能性の方が負ける可能性より高くなるかを考えた．

次の $\boxed{}$ に当てはまる数を解答用紙の所定欄に記入しなさい．

2個のさいころを n 回投げて負けとなる場合は，いずれの回にも2つのさいころがともに1の目が出ない場合である．その場合の確率は

$$\left(\boxed{ア}\right)^n$$

となるので，勝つ可能性の方が高くなるのは，この確率が $\dfrac{1}{2}$ より小さい場合である．したがって，不等式

$$\left(\boxed{イ}\right)^n < \boxed{ウ}$$

が成り立てばよい．

そこで，常用対数の値

$$\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771,\ \log_{10} 7 = 0.8451$$

を用いて，この不等式を解いてみよう．上記の不等式から

$$n\left(1 + \log_{10}\boxed{エ} - \boxed{オ}\log_{10} 2 - \boxed{カ}\log_{10}\boxed{キ}\right) < -\log_{10}\boxed{ク}$$

となるので，さいころを $\boxed{ケ}$ 回以上投げることにすれば勝つ可能性の方が高いことになる．

問2.　未知数 x の方程式

$$x^3 + 3ax^2 - 24a^2x + a^3 + 3a = 0$$

が正の実数解を持つような正の定数 a の値の範囲を以下のようにして求めた．

次の $\boxed{}$ に当てはまる数を解答用紙の指定欄に記入しなさい．

関数 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + 3ax^2 - 24a^2x + a^3 + 3a$ とすると

$$f'(x) = \boxed{サ}\left(x + \boxed{シ}a\right)\left(x - \boxed{ス}a\right)$$

である．したがって $a > 0$ であるから，関数 $f(x)$ は

$$x = \boxed{セ}a$$

のとき極小値

$$\boxed{\text{ソ}}\,a^3+\boxed{\text{タ}}\,a$$

をとる．ここで $f(0)>0$ に注意すると，この極小値が $\boxed{\text{チ}}$ 以下であればよいので

$$a \geqq \boxed{\text{ツ}}$$

が得られる．

問3．　1辺の長さが2の正三角形 ABC を底面とし，O を頂点とする四面体 $OABC$ がある．辺 OA，OB の長さは等しく，それらの長さは2以上であり，辺 OC の長さは辺 OA の $\sqrt{2}$ 倍である．

次の $\boxed{}$ に当てはまる数を解答用紙の指定欄に記入しなさい．

（1）　辺 AB の中点を M とし，辺 OM の長さを x とする．2辺 OA，OB の長さが2以上であるので

$$x \geqq \boxed{\text{ナ}}$$

である．

（2）　$x=\boxed{\text{ナ}}$ のとき，辺 OC の長さは $\boxed{\text{ニ}}$ である．

（3）　三角形 OMC において1辺の長さは他の2辺の長さの和より短くなければならないので

$$\boxed{\text{ナ}} \leqq x < \boxed{\text{ヌ}}$$

となる．

（4）　$x=\boxed{\text{ナ}}$ のときの辺 OM と辺 CM のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\boxed{\text{ネ}}$$

である．

（5）　x が（3）で求めた範囲を動くとき，四面体 $OABC$ の体積の最大値は $\boxed{\text{ノ}}$ であり，それを与える x の値は $\boxed{\text{ハ}}$ である．