

問1 $-90^\circ \leq x \leq 30^\circ$ のとき

$$f(x) = (a + b \sin x) \cos 2x$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。解答欄に答のみ記入せよ。

(1) $f(0^\circ) = 1$, $f(30^\circ) = \frac{3}{2}$ のとき, a, b を求めよ。

(2) このとき, $f(x)$ の最大値, 最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

問2 a, b, c, d を実数とし, $ac \neq 0, a \neq c$ とする。このとき,

$$I_1 = 36 \left\{ \int_0^1 (ax+b)(cx+d) dx \right\}^2$$

$$I_2 = 36 \int_0^1 (ax+b)^2 dx \cdot \int_0^1 (cx+d)^2 dx$$

とおく。次の問いに答えよ。解答欄に答のみ記入せよ。

(1) a, b, c, d の整式 $I_1 - I_2$ を, 因数分解した形で表せ。

(2) $I_1 = I_2$ が成立するとき, 2つの1次関数

$$y = ax + b, \quad y = cx + d$$

のグラフは, 必ず1つの共有点をもつ。その共有点の座標を求めよ。ただし, 答は a を含む形で表せ。

問3 関数 $f(x)$ は $x > 0$ で定義された増加関数で、

$$f(3) = 2, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

をみたしている。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 4$ をみたす x の値を求め、解答欄に答のみ記入せよ。

(2) 不等式

$$f(x+1) + f(x-3) \leq 4$$

を解き、その答を解答欄に記入せよ。また、その理由も記せ。

問 4 n 個の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ が $0 < a_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) をみたす。このとき、任意の 2 以上の整数 n に対し、不等式

$$(A) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n + (n-1)$$

を、数学的帰納法により証明せよ。等号が成立する場合を解答欄 (B) に明記し、(A) の証明を述べ、等号が成立する場合も吟味せよ。

[以 下 余 白]