

I. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2} & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-3)^2 & (2 \leq x \leq 3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 導関数 $f'(x)$ のグラフをかけ.

(2) 関数

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

を求めよ.

(3) 定積分

$$\int_0^3 \left(x - \frac{3}{2}\right) f(x) dx$$

の値を求めよ.

II. $\triangle ABC$ の外心 O から直線 BC , CA , AB にひいた垂線の足をそれぞれ P , Q , R とする. $0 < t < 1$ の範囲で関係式

$$(t+1)\overrightarrow{OP} + (t-1)\overrightarrow{OQ} - t(t+1)\overrightarrow{OR} = \vec{0}$$

をみたしているとき, 次の問に答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ.

(2) $\angle BAC$ の大きさを求めよ.

Ⅲ. 正の数 t に対して, 2 次方程式

$$x^2 - 2tx + 1 = 0$$

の解を α, β とし,

$$\theta = \arg \left(\frac{\alpha - i}{\beta - i} \right)$$

とおく. $\cos \theta$ を t の関数とみなして, $f(t) = \cos \theta$ とおくとき, $t > 0$ における $y = f(t)$ のグラフをかけ.

IV. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲の媒介変数 t によって

$$\begin{cases} x = (1 + \sin t) \cos t \\ y = (1 - \sin t) \cos t \end{cases}$$

と表される xy 平面上の曲線 C を考える. このとき, 次の問に答えよ.

(1) C はある一つの直線に関して対称な形をしている. その直線を求めよ.

(2) $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\frac{dy}{dx} = 0$ となる点の座標を求めよ.

(3) $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{dy}{dx}$ を求めよ.

(4) C によって囲まれる図形の面積を求めよ.

V. 0 を 6 つならべた数字列 000000 を以下の試行を繰り返すことによって変えていく.

さいころを 1 回振って出た目を r とする. このとき数字列の左から r 番目の数が 0 なら 1 に, 1 なら 0 に変更する.

たとえば, 出た目が順に 2, 5, 1, 2 であるならば, 数字列は

000000 $\longrightarrow$ 010000 $\longrightarrow$ 010010 $\longrightarrow$ 110010 $\longrightarrow$ 100010

と変化し, 4 回目の試行で得られた数字列は 100010 となる. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) $2n+1$ 回目の試行で得られた数字列に 1 がちょうど 1 個含まれていたとき, $2n+3$ 回目の試行で得られる数字列に 1 がちょうど 1 個含まれる確率を求めよ.
- (2) $2n+1$ 回目の試行で得られる数字列に 1 がちょうど 1 個含まれる確率を p_n , ちょうど 5 個含まれる確率を q_n とするとき, p_{n+1} , q_{n+1} をそれぞれ p_n , q_n で表せ.
- (3) $2n+1$ 回目の試行で得られる数字列に 1 がちょうど 3 個含まれる確率を求めよ. ただし, $n = 0, 1, 2, \dots$ とする.

[以 下 余 白]