

問 1.

$$(1) \quad 4 \log_3 \sqrt{10} + \log_{\frac{1}{3}} 25 + \log_3 \frac{9}{4} = \boxed{\text{ア}}$$

$$(2) \quad \sin 70^\circ - \sin 50^\circ + \cos 100^\circ = \boxed{\text{イ}}$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^i k \right) = \frac{n(n + \boxed{\text{ウ}})(n + \boxed{\text{エ}})}{\boxed{\text{オ}}}$$

$$(4) \quad 1024^{0.4} = \boxed{\text{カ}}$$

なお、(3) の ウ と エ は解答の順序は問わない。

問 2.

(1) 等式

$$\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \boxed{\text{キ}} x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3$$

が成立する. これより $y = x^4$ の導関数は $\boxed{\text{キ}} x^3$ である.

- (2) 定数 a に対し $f(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2$ とおき, 4 次曲線 $y = f(x)$ を考える. 実数 s をうまくとると $y = f(x)$ の $x = s$ での接線の傾きと $x = s + 3$ での接線の傾きが等しくなった. したがって

$$6s^2 + \boxed{\text{ク}} s + \boxed{\text{ケ}} + a = 0$$

である. このような実数 s が存在するためには

$$a \leq \boxed{\text{コ}}$$

でなければならない.

特に $a = \boxed{\text{コ}}$ のとき $s = \boxed{\text{サ}}$ となる. この場合 $x = \boxed{\text{サ}}$ における接線と $x = \boxed{\text{サ}} + 3$ における接線を求めると, それらの方程式は, いずれも

$$y = \boxed{\text{シ}} x + \boxed{\text{ス}}$$

となり, 一致することがわかる.

問 3.

方程式

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 - 6x + 13 = 0$$

の解を複素数平面上で考える. ただし p, q はともに実数であり $p^2 - 4q > 0$ とする.

第 1 の方程式は異なる 2 つの実数解 α, β をもつ. ただし $\alpha < \beta$ とする.

第 2 の方程式は 2 つの解

$$\gamma = \boxed{\text{セ}} + \boxed{\text{ソ}} i, \quad \delta = \boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}} i$$

をもつ. ここで i は虚数単位である.

複素数平面上で $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を表す点をそれぞれ A, B, C, D とする.

(1) 四角形 ADBC が正方形ならば

$$p = \boxed{\text{タ}}, \quad q = \boxed{\text{チ}}$$

である.

(2) 4 点 A, B, C, D が同一円周上にあるならば

$$\boxed{\text{ツ}} p + q + \boxed{\text{テ}} = 0$$

である.

問 4.

平面上の第 1 象限にある図形 $F_0, F_1, \dots, F_n$ を次のような操作で描いた。まず、平面上に点 $A_0 = (0, 1)$ をとる。原点 O を中心とし、点 A_0 を通る円が原点 O の右側で x 軸と交わる点を B_0 とする。このとき 2 つの線分 OA_0, OB_0 と弧 A_0B_0 で囲まれた図形を F_0 とする。

次に、弧 A_0B_0 上にあり y 座標が $\frac{1}{2}$ である点 $A_1 = \left(x_1, \frac{1}{2}\right)$ をとる。点 $C_1 = (x_1, 0)$ を中心とし、点 A_1 を通る円が点 C_1 の右側で x 軸と交わる点を B_1 とする。このとき 2 つの線分 OA_0, OB_1 と弧 A_0A_1, A_1B_1 で囲まれた図形を F_1 とする。

次に、弧 A_1B_1 上にあり y 座標が $\frac{1}{4}$ である点 $A_2 = \left(x_2, \frac{1}{4}\right)$ をとる。点 $C_2 = (x_2, 0)$ を中心とし、点 A_2 を通る円が点 C_2 の右側で x 軸と交わる点を B_2 とする。このとき 2 つの線分 OA_0, OB_2 と弧 A_0A_1, A_1A_2, A_2B_2 で囲まれた図形を F_2 とする。

以下、このような操作を繰り返して図形 F_n を描く、すなわち、弧 A_0A_1 , A_1A_2 , $\dots$, $A_{n-1}B_{n-1}$ が描かれたとして、次に、弧 $A_{n-1}B_{n-1}$ 上にあり y 座標が $\frac{1}{2^n}$ である点 $A_n = \left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$ をとる。点 $C_n = (x_n, 0)$ を中心とし、点 A_n を通る円が点 C_n の右側で x 軸と交わる点を B_n とする。このとき 2 つの線分 OA_0 , OB_n と弧 A_0A_1 , A_1A_2 , $\dots$, $A_{n-1}A_n$, A_nB_n で囲まれた図形を F_n とする。

そこで、各点 A_1 , A_2 , $\dots$, A_n の x 座標を求めてみよう。まず

$$x_1 = OC_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{2}$$

である。同じように考えて

$$x_2 = x_1 + C_1C_2 = \frac{3\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{4}$$

となる。以下、同様にして、一般に

$$x_n = \left(\boxed{\text{ニ}} + \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{2^n}\right) \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$$

を得る。

次に、各図形 F_n の面積 s_n を求めてみよう。まず、図形 F_0 は 2 つの線分 OA_0 , OB_0 と弧 A_0B_0 で囲まれた図形なので $s_0 = \frac{\pi}{4}$ である。図形 F_1 については

$s_1 = s_0 + \text{扇形 } C_1A_1B_1 \text{ の面積} + \text{三角形 } OC_1A_1 \text{ の面積} - \text{扇形 } OA_1B_0 \text{ の面積}$ と考えて、それぞれの面積を求めて計算すると

$$s_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{2} + \frac{\boxed{\text{ハ}}}{12} \pi \right)$$

となる。同じように考えれば、一般に $n \geq 1$ ならば

$$s_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{2} + \frac{\boxed{\text{フ}}}{12} \pi \right) \left(1 - \left(\frac{1}{\boxed{\text{ヘ}}} \right)^n \right)$$

である。

[以下 余 白]