

I. 複素数 z を

$$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$$

とおく. 次の問に答えよ.

(i) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ の値を求めよ.

(ii) 複素数平面において, $1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$ が表す点を, それぞれ, $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ とする. $\triangle P_1 P_2 P_4$ の重心を $Q(\alpha)$, $\triangle P_3 P_5 P_6$ の重心を $R(\beta)$ とおくと, 複素数 α と β を求めよ.

(iii) $\triangle P_0 QR$ の面積を求めよ.

II. 点 $A(a, b)$ は中心 $O(0, 0)$, 半径 1 の円の内部およびその周上を動き,

点 $P(p, q)$ は中心 $O'(4, 0)$, 半径 1 の円の内部およびその周上を動くとする. このとき

$$k = \frac{a+b-p-q}{a-b-p+q}$$

とおく. 次の問に答えよ.

(i) 直線 AP の傾きを m とする. k を m を用いて表せ.

(ii) k の値の取り得る範囲を求めよ.

Ⅲ. 関数 $f(x) = e^{-2x} \sin^2 x$ について次の問に答えよ.

(i) 区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減を調べ, この区間における $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(ii) 極限值

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M f(x) dx$$

を求めよ.

IV. 3人のテニス・プレーヤー A, B, C がいる. C が A に勝つ確率を a , C が B に勝つ確率を b として,

$$0 < a < b < 1$$

とする. ただし, 引き分けはないものとする. C が A, B と次の①, ②のどちらかの形式で3回対戦することになった.

	1 回戦	2 回戦	3 回戦
①	A	B	A
②	B	A	B

- (i) 対戦形式①において C が少なくとも2連勝する確率と, 対戦形式②において C が少なくとも2連勝する確率の大小を比較せよ.
- (ii) C は A に勝つと2点, B に勝つと1点もらえ, 負ければ点数をもらえないとする. ただし, 2回戦, 3回戦においてはその直前の試合に勝っているときに限りその回の得点を獲得できるとする. 対戦形式①, ②のそれぞれにおいて, C の総得点の期待値を E_1, E_2 とする. E_1, E_2 を求め, $E_1 > E_2$ となる a, b の条件を求めよ.

V. 曲線 C

$$y = f(x) = \frac{1}{1+x^6}$$

について考える.

- (i) C 上の点 $P(s, f(s))$ における C の接線と y 軸との交点を $(0, t)$ とする. P が C 上を動くとき, t の値の取り得る範囲を求めよ.
- (ii) $s > 0$ とする. 点 P と定点 $Q(0, 1)$ を結ぶ線分 PQ が曲線 C の下側にあるような s の範囲を定めよ.

[以 下 余 白]