

問 1.

$$(1) \quad \log_{\frac{1}{2}} \left(\left(\log_3 \left(\log_2 512 \right) \right)^{27} \right) = \boxed{7}$$

$$(2) \quad \int_{\sin 15^\circ}^{\cos 15^\circ} (3x^2 - 1) \, dx = \frac{\sqrt{2}}{\boxed{1}}$$

問 2.

辺の長さが1である正五角形と、その頂点を1つおきに結んだ5つの線分で囲まれた正五角形との面積の比を次のようにして求めた.

大きな方の正五角形の頂点を、反時計回りに A, B, C, D, E とし、線分 BE と AC, AD の交点をそれぞれ P, Q とする. このとき、小さな正五角形の辺の長さは線分 PQ である. 相似な図形の面積は辺の長さの ウ 乗に比例するので、まず長さ PQ を求める.

五角形の内角の和は 540° なので $\angle BAE = 108^\circ$ である. したがって $\angle ABE = \angle AEB = \text{エ }^\circ$ である. さらに $\angle PAB = \text{オ }^\circ$ なので $\angle EAP = \angle EPA = 72^\circ$ となることから $\triangle EAP$ は二等辺三角形であり、よって $PE = \text{カ}$ である. また $\angle AEB = \text{エ }^\circ$ なので $\triangle ABE$ と $\triangle PBA$ とは相似な三角形である. そこで $x = BP$ とおく.

$$1 : x = 1 + x : \text{キ}$$

となるので、方程式 $x^2 + x + \text{ク} = 0$ が成り立つ. よって

$$x = \frac{-1 + \sqrt{\text{ケ}}}{2}$$

であり、したがって

$$PQ = \frac{\text{コ} - \sqrt{\text{ケ}}}{2}$$

である.

これより、小さな正五角形と大きな正五角形の面積の比の値を t とすると

$$t = \frac{\text{小さな正五角形の面積}}{\text{大きな正五角形の面積}} = \frac{\boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{2}$$

を得る. この t が 2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\text{ス}} x + 1 = 0$$

の $0 < x < 1$ となる解である, すなわち, 放物線 $y = x^2 + \boxed{\text{ス}} x + 1$ と x 軸との交点で, 原点 O に近い方の点が $(t, 0)$ であることを用いて, 比の値 t を有理数で近似してみよう. いま y 軸との交点 $(0, 1)$ における放物線 $y = x^2 + \boxed{\text{ス}} x + 1$ の接線

$$y = \boxed{\text{セ}} x + 1$$

と x 軸との交点 P は点 $(t, 0)$ に近いので, その点 P の x 座標 $\frac{1}{\boxed{\text{ソ}}}$ を t の近似値と考えてよい. したがって, 小さな正五角形の面積は大きな正五角形の面積の約 $\frac{1}{\boxed{\text{ソ}}}$ であることがわかる.

問 3.

平面上の 2 点 $O(0, 0)$ と $P(1, 1)$ を通り, これらの 2 点 O, P だけで交わる放物線と円について考える. まず, 2 点 O, P を通る放物線は

$$y = ax^2 + (\boxed{\text{タ}} - a)x$$

と表される. ただし $a \neq 0$ である. また 2 点 O, P を通る円の中心を Q とすると, 線分 OQ の長さと線分 PQ の長さは等しいので, 点 Q は直線 $x + y = \boxed{\text{チ}}$ 上にある. したがって, 点 Q の座標は $(\boxed{\text{ツ}} - t, t)$ と表される. これより 2 点 O, P を通る円の方程式は

$$(x + t + \boxed{\text{テ}})^2 + (y - t)^2 = 2t^2 - 2t + \boxed{\text{ト}}$$

である.