

問1 次の空欄にあてはまる適当な数値等を解答欄に記入せよ。

x の2次関数

$$f(x) = 3x^2 + bx + c$$

が、任意の角 θ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) に対して

$$f(2\sin\theta) \geq 0, \quad f(3 - \cos\theta) \leq 0$$

をみたす。このとき、 $2b + c =$ ア で、 b の取り得る最大の値は イ である。

さらに、 $f(2\cos\theta)$ ($60^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$) の最小値が10ならば、 $(b, c) =$ ウ である。

問2 座標平面上の、 x , y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。P は、はじめ原点 O にあり、格子点の上を終点 T まで動く点とする。また、十分多くのカードの束があり、それぞれのカードには A, X, Y のうちの1つの文字が書かれている。各格子点でカードを1枚ずつ上から順にひく。動点 $P(i, j)$ は、次の3つの規則にしたがって、その点にとどまるか、または、終点 $T(m, n)$ に向かって進む。

規則1. A をひいたときは、 x 方向または y 方向のどちらか一方に+1 進む。

規則2. X をひいたときは、

$$\begin{cases} i < m & \text{ならば } x \text{ 方向に+1 進む。} \\ i \geq m & \text{ならば その点にとどまる。} \end{cases}$$

規則3. Y をひいたときは、

$$\begin{cases} j < n & \text{ならば } y \text{ 方向に+1 進む。} \\ j \geq n & \text{ならば その点にとどまる。} \end{cases}$$

このとき、次の空欄にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

1. 終点 T が $(2, 4)$ で、カードの束がすべて A からなっているとき、原点 O から終点 T に至る道順は、ア 通りである。
2. カードの束が X, Y, X, Y, ... と交互に並んでいるとする。このとき、終点 T が $(3, 5)$ ならば、動点 P が原点 O から終点 T に至るまでには、イ 回カードをひく必要がある。また、終点 T が (m, n) (ただし、 $m > n$) のときは、ウ 回カードをひく必要がある。
3. カードの束のはじめの 2 枚が A, A で、3 枚目からは、X, Y, X, Y, ... と交互に並んでいるとする。このとき、終点 T が $(4, 5)$ ならば、動点 P が原点 O から終点 T に至るまでには、少なくとも エ 回カードをひく必要がある。

問3 a, b を正の数とし, n を自然数とする。

このとき, 不等式

$$\log_2(a+b) + \log_2(a^2+b^2) + \log_2(a^3+b^3) + \cdots + \log_2(a^n+b^n) \\ \geq n \left\{ 1 + \boxed{} (\log_2 a + \log_2 b) \right\}$$

が成立する。空欄に最も適当な数式を記入し, その不等式を証明せよ。 a, b がどのようなときに等号が成立するか, その場合も明記せよ。

問4 $x \geq \frac{1}{2}$ における関数 $f(x) = \int_x^{x+1} |3t(t-2)| dt$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を x の整式で表せ。

(ア) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ のとき $f(x) =$

(イ) $1 \leq x \leq 2$ のとき $f(x) =$

(ウ) $2 \leq x$ のとき $f(x) =$

(2) $f(x)$ が最小値をとるときの x の値を求めよ。

[以 下 余 白]