

I. $A(a, 0)$ を定点とし, C を双曲線 $x^2 - y^2 = 4$ の $x > 0$ の部分とする。 A を通る傾き m (ただし $m > 0$) の直線が, 異なる 2 点で C と交わるように m の範囲を定めよ。

II. $f_0(x) = e^x$ とし, $n = 1, 2, \dots$ に対し $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = x f_{n-1}'(x)$$

により定め,

$$P_n(x) = e^{-x} f_n(x)$$

とおく。次の問に答えよ。

(i) $P_n(x)$ は n 次多項式であることを証明せよ。

(ii) $P_n(x)$ における x^n の係数を a_n , x^{n-1} の係数を b_n とおく。 a_n , b_n を求めよ。

Ⅲ. (i) 2×2 行列 A は条件

$$A(E-A) = O \quad \dots\dots (*)$$

を満たすものとする。ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。実数 s, t に対

して $X = sA + t(E-A)$ とおくとき

$$X^2 - (s+t)X$$

を求めよ。

(ii) $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$Y = sA + t(E-A)$$

となるように実数 s, t ($s > t$) と条件(*)を満たす行列 A を求めよ。

(iii) (ii) の行列 A, Y と自然数 n に対して

$$Y^n = p_n A + q_n (E-A)$$

を満たす p_n, q_n を求めよ。

IV. (i) a, b を実数とする。 $a < b$, $a = b$, $a > b$ のそれぞれの場合に極限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_x (x^a + x^b)$$

を求めよ。

(ii) a, b は $a^2 + b^2 \leq 1$ を満たす実数とする。

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_x (2x^a + x^{\frac{b}{2}})$$

を最小にする a, b およびそのときの L の値を求めよ。

V. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して

$$I(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \tan \theta \cos x| \sin 2x dx$$

とおく。次の問に答えよ。

(i) $I(\theta)$ を求めよ。

(ii) $I(\theta)$ を最小にする θ に対し $\cos \theta$ の値を求めよ。

[以 下 余 白]