

問1

$$(1) \quad \begin{cases} 8 \cdot 3^x - 3^y = -27 \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 \end{cases}$$

のとき $x = \boxed{\text{ア}}$, $y = \boxed{\text{イ}}$ である.

$$(2) \quad \int_0^4 |x^2 - 5x + 6| dx = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{3} \text{ である.}$$

$$(3) \quad a_1 = 4, \quad a_{n+1} = -2a_n + 15 \text{ のとき}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i > 10^3$$

となる最小の n は $\boxed{\text{エ}}$ である.

$$(4) \quad \text{サイコロを3個投げるとき1の目も2の目も出る確率は} \frac{\boxed{\text{オ}}}{36} \text{ である.}$$

問 2

点 $(0, -2t + 11)$ を中心として半径 2 の円を S とし, 点 $(t - 13, 0)$ を中心として半径 r の円を T とする. ただし r は自然数とする.

- (1) 円 S と円 T の中心がもっとも近づくのは $t = \boxed{\text{カ}}$ のときで, その距離は $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である.
- (2) どのような実数 t に対しても, 円 S と円 T が共有点をもたないような自然数 r の最大値は $\boxed{\text{ク}}$ である.
- (3) $t = 10$ のとき, 円 S が円 T の内部にあるような自然数 r の最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である.

問 3

複素数平面において、原点を通らない直線の方程式は、0でない複素数 α を用いて

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2$$

と表すことができる。

- (1) 点 $A(1)$ と点 $B(\sqrt{3}i)$ を通る直線 L の方程式を

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2$$

と表すとき、複素数 α は

$$\alpha = \boxed{\text{コ}} + \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}} i$$

である。したがって $|\alpha|^2 = \frac{\boxed{\text{シ}}}{3}$ である。

- (2) 直線 L と複素数 α は(1)のものとする。点 $Q(\omega)$ を与えるとき、点 Q と直線 L に関して対称な点 $Q'(\omega')$ は

$$\omega' = \left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{2} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{2} i \right) \bar{\omega} + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{2} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{2} i$$

である。

問 4

三角形の重心, 外心 (外接円の中心), 垂心は一直線上にあることが知られている. この事実を具体的な三角形において確認しよう.

三角形 OAB の各辺の長さが $OA = 4$, $OB = 3$, $AB = \sqrt{17}$ として, いま

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$$

とする.

(1) 2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は チ である.

(2) 三角形 OAB の重心を G とすれば

$$\vec{OG} = \frac{1}{\text{ツ}} (\vec{a} + \vec{b})$$

である.

(3) 頂点 O から対辺 AB へ垂線を引き, この垂線と AB との交点を P とする. 3点 A, P, B が一直線上にあることと, 条件 $\vec{OP} \perp \vec{AB}$ から

$$\vec{OP} = \frac{\text{テ}}{17} \vec{a} + \frac{\text{ト}}{17} \vec{b}$$

である. さらに, 三角形 OAB の垂心 H が直線 OP 上にあることと, 条件 $\vec{AH} \perp \vec{OB}$ から

$$\vec{OH} = \frac{\text{ナ}}{\text{ヌ}} \vec{a} + \frac{\text{ニ}}{\text{ネ}} \vec{b}$$

である.

(4) 次に, 三角形 OAB の外心を R とし, 実数 p, q によって

$$\vec{OR} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

と表されているとする. 条件 $OR = AR = BR$ から

$$\vec{OR} = \frac{\text{ネ}}{64} \vec{a} + \frac{\text{ノ}}{64} \vec{b}$$

である. ゆえに $\vec{RH} = \text{ハ} \vec{RG}$ となり, 点 R, H, G は一直線上にあることがわかる.