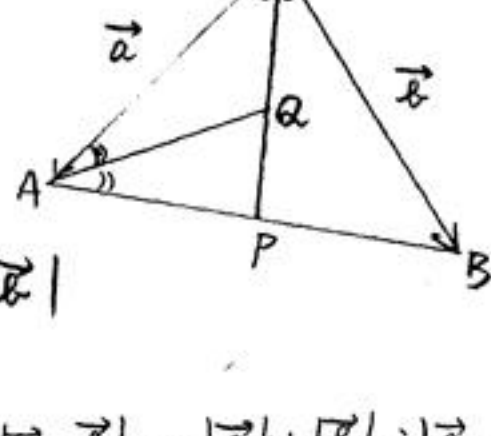


1. 7. 15²¹⁹ 1. -1

7. $10^{2^{n-1}}$ I. $n-1$

2 (1) OPは $\angle AOB$ の二等分線だから
 $AP:PB=|a|:|b|$ より
 $\vec{OP} = \frac{|b|\vec{a} + |a|\vec{b}}{|a|+|b|}$ (答)



(2) $AP = AB \cdot \frac{|a|}{|a|+|b|} = \frac{|a|}{|a|+|b|} |\vec{a}-\vec{b}|$
 AQは $\angle OAP$ の二等分線だから
 $OQ:QP = OA:AP = |a|:\frac{|a|}{|a|+|b|} |\vec{a}-\vec{b}| = |a|+|b|:|\vec{a}-\vec{b}|$
 $\therefore \vec{OQ} = \frac{OQ}{OP} \vec{OP} = \frac{|a|+|b|}{|a|+|b|+|\vec{a}-\vec{b}|} \cdot \frac{|b|\vec{a} + |a|\vec{b}}{|a|+|b|}$
 $= \frac{|b|\vec{a} + |a|\vec{b}}{|a|+|b|+|\vec{a}-\vec{b}|}$ (答)

(3) $\vec{a}=(2,0), \vec{b}=(x,1) \quad \vec{a}-\vec{b}=(2-x,-1)$ なら
 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{x^2+1}, |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(x-2)^2+1}$
 $\therefore \vec{OQ} = \frac{\sqrt{x^2+1}(2,0) + 2(x,1)}{2+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+1}}$
 $\therefore f(x) = \frac{2}{2+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+1}}$
 $f(x)$ の分母 $2+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+1} = g(x)$ とおくと $g(x)$ が最小、
 最大となるとき、 $f(x)$ は最大、最小となる。
 $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{2(x-2)}{2\sqrt{(x-2)^2+1}} = \frac{x\sqrt{(x-2)^2+1} + (x-2)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x-2)^2+1}}$
 $= \frac{4(x-1)}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x-2)^2+1} \{x\sqrt{(x-2)^2+1} + (x-2)\sqrt{x^2+1}\}}$
 $0 \leq x \leq 2$ での増減表は次のようになる。

x	0		1		2
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘	極小か 最小	↗	

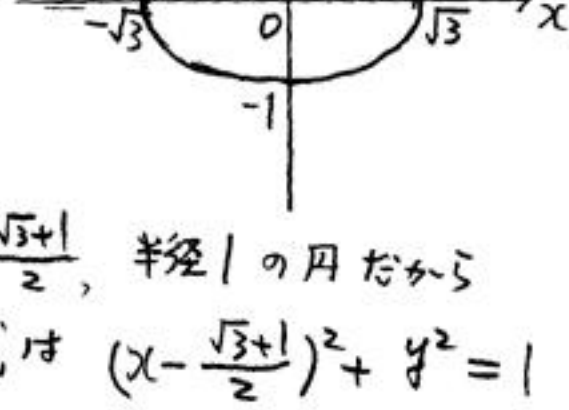
最小値 $= g(1) = 2(\sqrt{2}+1)$

最大値 $= g(0) = g(2) = 3+\sqrt{5}$

よって $f(x) = \frac{2}{g(x)}$ より

$\begin{cases} f(x) \text{の最大値} = \frac{2}{2(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}-1 \\ f(x) \text{の最小値} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (答)

3 (1) $|z|=2$ の上を動くから $z=2(\cos\theta+i\sin\theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$
 とおける。
 $w = \frac{\sqrt{3}+1}{4} z + (\sqrt{3}-1) \frac{1}{z}$
 $= \frac{\sqrt{3}+1}{4} \cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta) + (\sqrt{3}-1) \cdot \frac{1}{2} \{ \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \}$
 $= \frac{\sqrt{3}+1}{2} (\cos\theta+i\sin\theta) + \frac{\sqrt{3}-1}{2} (\cos\theta-i\sin\theta)$
 $= \sqrt{3}\cos\theta + i\sin\theta$
 $w = x + yi \quad (x, y \text{ は実数})$ とおくと
 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\theta & \text{これを } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{ に代入して} \\ y = \sin\theta & \theta \text{ を消去すると} \end{cases}$
 $(\frac{x}{\sqrt{3}})^2 + y^2 = 1$
 $\therefore \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$
 複素数平面上に図示すると
 右図の楕円になる。



(2) $|z - \frac{\sqrt{3}+1}{2}| = 1$ なる円は中心が $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, 半径1の円だから
 $z = x + yi$ とするとこの円の方程式は $(x - \frac{\sqrt{3}+1}{2})^2 + y^2 = 1$
 楕円と直線とに交点を求める。辺々引いて
 $(x - \frac{\sqrt{3}+1}{2})^2 - \frac{x^2}{3} = 0$
 $\Leftrightarrow \{ \sqrt{3}(2x - \sqrt{3} - 1) + 2x \} \{ \sqrt{3}(2x - \sqrt{3} - 1) - 2x \} = 0$
 $\Leftrightarrow \{ 2(\sqrt{3}+1)x - (3+\sqrt{3}) \} \{ 2(\sqrt{3}-1)x - (3-\sqrt{3}) \} = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-1)}$
 このうち $x = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{3} > \sqrt{3}$
 となるので交点とはならない。

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を楕円に代入して $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 よって求める交点は $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (答)

(3)
 グラフはx軸対称である。
 求める面積をSとする。
 Sのうち、 $y \geq 0$ の部分で
 $x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ の部分をA、
 $x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ の部分をBとすると
 $S = 2(A+B)$ ①

Aについて $A = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

Bについて $B = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} y dx \quad x = \sqrt{3}\cos\theta$
 $dx = -\sqrt{3}\sin\theta d\theta$

$B = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta (-\sqrt{3}\sin\theta) d\theta$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} [\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{3}{8}$

A, Bを①に代入して 求める面積は
 $S = 2 \{ (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}) + (\frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{3}{8}) \}$
 $= (1+\sqrt{3})(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})$ (答)

4 (1)
 $\angle P_n O P_{n+1} = \theta_n$ とする。
 $\theta_1 = \angle P_1 O P_2 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_n = \frac{1}{2} \theta_{n-1}$ であるから
 $\theta_n = \frac{\pi}{4} \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$
 $a_1 = R_1 R_2 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\begin{cases} OR_{n+1} = OR_n \cos \theta_n & \text{..... ①} \\ a_n = OR_n \sin \theta_n & \text{..... ②} \end{cases}$ が成立する。
 ①より $OR_n = OR_{n+1} \cos \theta_{n+1} = (OR_{n+2} \cos \theta_{n+2}) \cos \theta_{n+1}$
 $= (OR_{n+3} \cos \theta_{n+3}) \cos \theta_{n+2} \cos \theta_{n+1}$
 $= \dots$
 $= OR_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}$
 ②に代入して $OR_1 = 1$ を代入すると
 $a_n = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \sin \theta_n$
 $\therefore a_n \cos \theta_n = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \sin \theta_n \cos \theta_n$
 ここで $\theta_k = \frac{\pi}{2^{k+1}}$ ($k=1, 2, \dots, n$) だから
 $\sin \theta_k \cos \theta_k = \frac{1}{2} \sin 2\theta_k = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^k} = \frac{1}{2} \sin \theta_{k-1}$ を繰り返して使うと
 $a_n \cos \theta_n = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \sin \theta_{n-1}$
 $= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \cdot \frac{1}{2} \sin \theta_{n-2}$
 $= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-3} \cdot \frac{1}{2^2} \sin \theta_{n-3}$
 $= \dots$
 $= \cos \theta_1 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sin \theta_1$
 $= \frac{1}{2^n} \sin 2\theta_1$
 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ だから $a_n \cos \theta_n = \frac{1}{2^n}$
 $\theta_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ を代入して $a_n = \frac{1}{2^n \cos \theta_n} = \frac{1}{2^n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$ (証明終)

(2) 明らかに $a_n > 0$ である。

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^{n+1} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ③

$\frac{\pi}{2^{n+1}}$ は第1象限の角であり、 $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ はnについて増加する

のぞ $0 < \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} < \cos \frac{\pi}{2^{n+2}} \therefore 0 < \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+2}}} < 1$

これと③より $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$ ④

次に $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1}{3}$ を示す。 $\theta_{n+1} = \frac{\pi}{2^{n+2}}$ とおくと $\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2\theta_{n+1}$ だから

$3 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} - 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}$

$= 3 \cos 2\theta_{n+1} - 2 \cos \theta_{n+1}$ ⑤

$= 3(2\cos^2 \theta_{n+1} - 1) - 2 \cos \theta_{n+1}$

$= 6\cos^2 \theta_{n+1} - 2\cos \theta_{n+1} - 3$

$= 6(\cos \theta_{n+1} - \frac{1}{6})^2 - \frac{19}{6}$

$= f(\cos \theta_{n+1})$ とおくと

$n \geq 1$ として $\theta_{n+1} \leq \frac{\pi}{8}$ だから $\cos \frac{\pi}{8} \leq \cos \theta_{n+1} < 1$ 。⑤において $\theta_{n+1} = \frac{\pi}{8}$ を代入

$\therefore f(\cos \theta_{n+1}) \geq f(\cos \frac{\pi}{8}) = 3 \cos \frac{\pi}{4} - 2 \cos \frac{\pi}{8} = (\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{\pi}{8})$

$= \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{\pi}{8} > \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{\pi}{8}$

$= 2(1 - \cos \frac{\pi}{8}) > 0$

$\therefore f(\cos \theta_{n+1}) \geq 3 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} - 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+2}} > 0$

$\therefore \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2 \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}} > \frac{1}{3}$

よって ③より $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1}{3}$ ⑥

④と⑥より $\frac{1}{3} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{3} a_n < a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n$ (証明終)

(3) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, (1)の結果より $a_2 = \frac{1}{4 \cos \frac{\pi}{8}}$

よって $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ より $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ これを a_2 に代入して

$a_2 = \frac{1}{2 \sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

a_1, a_2 と証明すべき不等式を見比べると $a_n > 0$ だから

(2)の結果より $a_2 (\frac{1}{3})^{n-2} < a_n < a_2 (\frac{1}{2})^{n-2} \quad (n \geq 3)$

この不等式に等号は成立しないから ($n=2$ ときの等号も成立)

$\sum_{i=2}^n a_2 (\frac{1}{3})^{i-2} < \sum_{i=2}^n a_i < \sum_{i=2}^n a_2 (\frac{1}{2})^{i-2}$

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を加えて $\frac{1}{\sqrt{2}} + a_2 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} < a_1 + \sum_{i=2}^n a_i < \frac{1}{\sqrt{2}} + a_2 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$

極限 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ をとると ⑤の不等式にも等号はつかず

$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} a_2 < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i < \frac{1}{\sqrt{2}} + 2a_2$

a_2 を代入して

$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} < \lim_{n \rightarrow \infty} L_n < \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (\text{証明終})$