

$$1. (1) b = a\sqrt{k}, \quad c = a\sqrt{k^2}$$

(2) c が最大辺だから $\triangle ABC$ の成立条件は

$$c < a + b \iff a\sqrt{k^2} < a + a\sqrt{k}$$

$$a > 0 \text{ だから } k^2 - k - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$k \geq 1$ だから k のとりうる値の範囲は

$$1 \leq k < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \dots\dots (\text{答})$$

(3) 余弦定理を使て

$$\cos A = \frac{(a\sqrt{k})^2 + (a\sqrt{k^2})^2 - a^2}{2 \cdot a\sqrt{k} \cdot a\sqrt{k^2}}$$

$$= \frac{k^2 + k^2 - 1}{2k^3}$$

$\sin A > 0$ だから

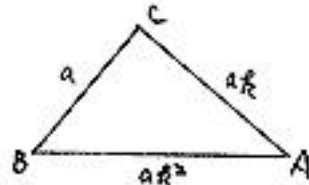
$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{k^2 + k^2 - 1}{2k^3}\right)^2} = \sqrt{\frac{(2k^3)^2 - (k^2 + k^2 - 1)^2}{4k^6}}$$

$$= \frac{\sqrt{(2k^3 + k^2 + k^2 - 1)(2k^3 - (k^2 + k^2 - 1))}}{2k^3}$$

$$= \frac{\sqrt{(k^2 + k + 1)^2 - 1} \sqrt{1 - k^2(k-1)^2}}{2k^3}$$

$$= \frac{\sqrt{(k(k+1)+1)(k(k+1)-1)} \sqrt{1+k(k-1)} \sqrt{1-k(k-1)}}{2k^3}$$

$$= \frac{\sqrt{(k^2+k+1)(k^2+k-1)(k^2-k+1)(-k^2+k+1)}}{2k^3} \dots\dots (\text{答})$$



$$(4) S = \frac{1}{2} ac \sin A$$

$$= \frac{1}{2} a\sqrt{k} \cdot a\sqrt{k^2} \cdot \frac{\sqrt{(k^2+k+1)(k^2+k-1)(k^2-k+1)(-k^2+k+1)}}{2k^3}$$

$$= \frac{a^2}{4} \sqrt{(k^2+k+1)(k^2+k-1)(k^2-k+1)(-k^2+k+1)} \dots\dots (\text{答})$$

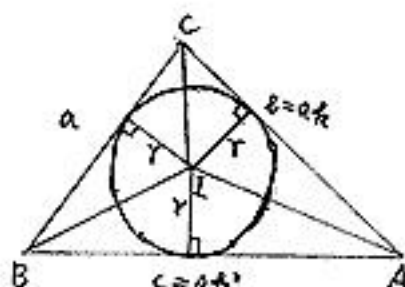
(5) 内心を I とすると

$$S = \triangle BIC + \triangle CIA + \triangle AIB$$

$$= \frac{r}{2} (a + b + c)$$

$$= \frac{r}{2} (a + a\sqrt{k} + a\sqrt{k^2})$$

$$= \frac{ra}{2} (k^2 + k + 1)$$



$$\therefore r = \frac{2S}{a(k^2 + k + 1)} \quad \therefore \text{これに (4) の結果を代入して}$$

$$r = \frac{2}{a(k^2 + k + 1)} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{(k^2+k+1)(k^2+k-1)(k^2-k+1)(-k^2+k+1)}$$

$$= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{(k^2+k-1)(k^2-k+1)(-k^2+k+1)}{k^2+k+1}} \dots\dots (\text{答})$$

2.

$$(1) [2, 1] = [1, 2] = 2 + 1 = 3. \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) [2, k+1] = [1, [2, k]] = [2, k] + 1 \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) [2, k] = a_k \text{ とおくと } a_{k+1} = a_k + 1, \quad a_1 = 3.$$

よって数列 $\{a_k\}$ は 初項 3, 公差 1 の等差数列となるので

$$a_k = 3 + (k-1) = k+2.$$

$$\therefore [2, k] = k+2. \dots\dots (\text{答})$$

$$(4) [3, k] = [2, [3, k-1]] = [3, k-1] + 2$$

$$[3, 1] = [2, 2] = 2 + 2 = 4.$$

よって数列 $\{[3, k]\}$ は 初項 4, 公差 2 の等差数列となるから

$$[3, k] = 4 + 2(k-1) = 2k+2 \dots\dots (\text{答})$$

$$(5) [4, k] = [3, [4, k-1]] = 2[4, k-1] + 2$$

$[4, k] - d = 2\{[4, k-1] - d\}$ の形に書けるような d を求めると $d - 2d = 2 \quad \therefore d = -2$

$$\therefore [4, k] + 2 = 2\{[4, k-1] + 2\}$$

$$[4, 1] + 2 = [3, 2] + 2 = 6 + 2 = 8$$

よって数列 $\{[4, k] + 2\}$ は 初項 8, 公比 2 の等比数列となるので $[4, k] + 2 = 8 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+2}$

$$\therefore [4, k] = 2^{k+2} - 2 \dots\dots (\text{答})$$

$$3. (1) f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 3x_1x_2(x_1 + x_2) - 2 \dots\dots \textcircled{1}$$

$x_1 = x_2 = 0$ を代入すると

$$f(0) = f(0) + f(0) - 2 \quad \therefore f(0) = 2 \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) x_1 = x, \quad x_2 = h \text{ を代入すると}$$

$$f(x+h) - f(x) = f(h) + 3xh(x+h) - 2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h) - 2}{h} + 3x(x+h)$$

$2 = f(0)$ だから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 3x(x+h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = 1 \text{ だから}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) f(x) = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$f(0) = 2 \text{ だから } C = 2$$

$$\therefore f(x) = x^3 + x + 2 \dots\dots (\text{答})$$

$$(4) f(x) \leq 0 \iff x^3 + x + 2 \leq 0$$

$$\iff (x+1)(x^2 - x + 2) \leq 0$$

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ だから}$$

$$x+1 \leq 0 \text{ より求める範囲は } x \leq -1 \dots\dots (\text{答})$$

(5) 原点から $y = f(x)$ に引いた接線 ℓ の

接点を $A(d, d^3 + d + 2)$ とすると ℓ の

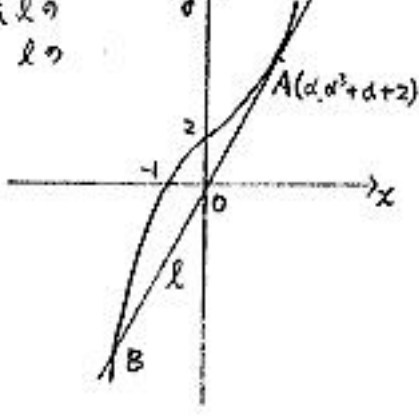
方程式は

$$y = (3d^2 + 1)(x - d) + d^3 + d + 2$$

$$= (3d^2 + 1)x - 2d^3 + 2$$

これが原点を通るので

$$-2d^3 + 2 = 0$$



$$\therefore d^3 = 1 \quad \therefore d = 1 \quad \therefore A(1, 4)$$

$$\therefore \text{このとき接線 } \ell \text{ の方程式は } y = 4x \dots\dots (\text{答})$$

共有点を求めると $x^3 + x + 2 = 4x$

$$\therefore x^3 - 3x + 2 = 0$$

$x = 1$ が接点なので左辺は $(x-1)^2$ を因数に含むことを考慮して $(x-1)^2(x+2) = 0 \quad \therefore x = 1, -2.$

$x = 1$ のとき接点 $A(1, 4)$ となり,

$x = -2$ のとき交点 $(-2, -8)$ となる。

以上より求める共有点は $(1, 4), (-2, -8) \dots\dots (\text{答})$