

問1 次の空欄にあてはまる数値または式等を解答欄に記入せよ。

xy 平面上の、正の整数 m, n を成分にもつ点 (m, n) を格子点と呼ぶ。各格子点に次の規則で番号 $f(m, n)$ を付ける：

$$(i) \quad f(1, 1) = 1$$

$$(ii) \quad \begin{cases} f(n, 1) = f(1, n-1) + 1 & (n = 2, 3, 4, \dots) \\ f(n-i, i+1) = f(n-i+1, i) + 1 & (i = 1, 2, \dots, n-1; n \geq 2). \end{cases}$$

このとき、 $f(3, 2) = \boxed{\text{ア}}$ である。 $f(1, m), f(m, 1)$ を m の式で表すと、それぞれ、 $f(1, m) = \boxed{\text{イ}}$, $f(m, 1) = \boxed{\text{ウ}}$ である。また、 $f(m, n) = 100$ となる格子点 (m, n) は、 $m + n = \boxed{\text{エ}}$ をみたし、その座標は $(m, n) = \boxed{\text{オ}}$ である。

問2 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、関数

$$f(\theta) = \left(\frac{1}{2}\sin^2\theta + \sin\theta + \frac{1}{2}\right)^3 + \cos 2\theta - 4\sin\theta - 3$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $x = \frac{1}{2}\sin^2\theta + \sin\theta + \frac{1}{2}$ とするとき、 x の動く範囲を求めよ。

(2) $y = |f(\theta)|$ の最大値を求めよ。

問3 次の空欄にあてはまる0以上の数値または式を解答欄に記入せよ。

次のルールで1つのサイコロを繰り返して投げる：

5以上の目が続けて2回出たら，このサイコロ投げをやめる

それ以外の場合は，サイコロ投げを続ける。

このとき， n 回目に5以上の目が出て，かつ $(n+1)$ 回目のサイコロ投げを続ける確率を a_n とおき， n 回目に4以下の目が出て， $(n+1)$ 回目のサイコロ投げを行う確率を b_n とおく。

$n = 1, 2$ のときは $a_1 = \boxed{\text{ア}}$, $b_1 = \boxed{\text{イ}}$, $a_2 = \boxed{\text{ウ}}$, $b_2 = \boxed{\text{エ}}$ である。

1 以上の n に対して、関係式

$$(A) \quad a_{n+1} = \boxed{\text{オ}} \times a_n + \boxed{\text{カ}} \times b_n, \quad b_{n+1} = \boxed{\text{キ}} \times a_n + \boxed{\text{ク}} \times b_n \\ (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。

また、(A) から a_n, a_{n+1}, a_{n+2} の関係式を導くと、

$$(B) \quad a_{n+2} - \boxed{\text{ケ}} \times a_{n+1} - \boxed{\text{コ}} \times a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる。ここで、 $t^2 - \boxed{\text{ケ}}t - \boxed{\text{コ}} = 0$ の 2 つの解 $\alpha, \beta = \frac{\boxed{\text{サ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}} \quad (\alpha > \beta)$

である。(B) は $a_{n+2} - (\alpha + \beta) \times a_{n+1} + \alpha\beta \times a_n = 0$ と表すことができるから、

$$a_{n+2} - \alpha \times a_{n+1} = \boxed{\text{セ}} \times (a_{n+1} - \alpha \times a_n), \quad a_{n+2} - \beta \times a_{n+1} = \boxed{\text{ソ}} \times (a_{n+1} - \beta \times a_n)$$

よって、

$$(C) \quad a_{n+1} - \alpha \times a_n = \boxed{\text{タ}} \times \beta^n, \quad a_{n+1} - \beta \times a_n = \boxed{\text{チ}} \times \alpha^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。

(C) より、 α, β を用いて a_n を表すと

$$a_n = \boxed{\text{ツ}}$$

となる。 $\boxed{\text{ツ}}$ を用いて $(n+1)$ 回目でサイコロ投げをやめる確率 P_{n+1} を α, β で表せば

$$P_{n+1} = \boxed{\text{テ}} \times a_n = \boxed{\text{ト}}$$

となることが分かる。

問 4 $a > 0, a \neq 1$ とする。このとき, x の不等式

$$\log_a(x+2) \geq \log_{a^2}(3x+16)$$

を解け。

[以 下 余 白]