

1 次の にあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) 次の行列 A の $(1, 2)$ 成分は である。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix}^{2003} \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}^{219}$$

(2) 自然数 n に対して

$$I_n = \int_{-1}^1 \left| x^3 - x + \frac{x}{n} \right| dx - \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx$$

とおく。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n =$ である。

(3) 1桁の数 $a = 0, 1, \dots, 9$ に対して、 $9 - a$ を a の補数といい、 $\bar{a}$ で表す。2桁以上の10進数 k については、各桁をその補数で置き換えた数を k の補数といい、 $\overline{k}$ で表す。 $\|k\|$ で k の桁数を表すとき、数列 $\{x_n^{(a)}\}$ を

$$\begin{cases} x_1^{(a)} &= a \\ x_{n+1}^{(a)} &= 10^{\|x_n^{(a)}\|} \times x_n^{(a)} + \overline{x_n^{(a)}} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

で定める。 a が0以外の1桁の数のとき、 $x_n^{(a)} + \overline{x_n^{(a)}} + 1$ を n を用いて表すと

となる。また、 $x_n^{(3)} - x_n^{(2)}$ が 9^m で割り切れるとき、 m の最大値は である。

「ただし、 m は 0 以上の整数の範囲で考える。」

2 座標平面上の3点 O, A, B は同一直線上にないとする。線分 AB 上の点 P は $\angle AOP = \angle POB$ をみたし、線分 OP 上の点 Q は $\angle OAQ = \angle QAP$ をみたすとする。ベクトル $\overrightarrow{OA}$, ベクトル $\overrightarrow{OB}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とおく。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $O(0,0)$, $A(2,0)$ とし、実数 x に対して $B(x,1)$ とする。このとき、点 Q の y 座標を $f(x)$ とする。 x が $0 \leq x \leq 2$ の範囲を変化するときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

3

(1) 複素数 z が円 $|z| = 2$ の上を動くとき、複素数

$$w = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{4} \right) z + (\sqrt{3} - 1) \frac{1}{z}$$

が表す点の軌跡を複素数平面上に図示せよ。

(2) (1) で求めた曲線と、 $\left| z - \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right| = 1$ で定まる円との交点を求めよ。

(3) (1) で定まる曲線の内部と、円の内部 $\left| z - \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right| < 1$ との共通部分の面積を計算せよ。

座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 $P(0, 1)$, $Q(1, 0)$ をとり, 点 $P_1, P_2, \dots$ および点 $R_1, R_2, \dots$ を次のように定める. $P = P_1$ とし, P_n が与えられたとき, 弧 $\widehat{P_n Q}$ の中点を P_{n+1} とする. また, $P = R_1$ とし, R_n が与えられたとき, R_n から半径 OP_{n+1} へ下した垂線の足を R_{n+1} とする. $n = 1, 2, \dots$ に対して, $a_n = R_n R_{n+1}$ と定める. このとき, 以下の等式および不等式を示せ.

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{2^n \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(2) \quad \frac{1}{3} a_n < a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(3) \quad R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1} \text{ を順次結んで得られる折れ線の長さ } L_n = \sum_{i=1}^n a_i \text{ は}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} < \lim_{n \rightarrow \infty} L_n < \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

をみたす。