

I. a, b を正の整数とし,

$$f(x) = x^4 + ax^3 + (a+b)x^2 + (2-a)x + 1$$

とおく. 4 次方程式 $f(x) = 0$ の解がすべて絶対値 1 の複素数であるとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x) = 0$ のどの解も実数ではないことを示せ.

(2) a, b を求めよ.

(3) $f(x) = 0$ の四つの解を頂点とする, 複素数平面上の四角形の面積を求めよ.

II. 0, 1, 2 をいくつか並べてできる配列に対して, 次の変換を考える:

左から順に調べ, 初めて 11 が現れたとき, それを 02 に置きかえる.

n 桁の配列 P に対して, この変換を可能な限り繰り返し, 最終的に得られる配列を $\overline{P}$ とする. たとえば, 8 桁の配列 $P = 00111110$ に対しては

$$00111110 \rightarrow 00021110 \rightarrow 00020210$$

のようにして, 2 回の変換で $\overline{P} = 00020210$ が得られる. 0 と 1 のみからなる n 桁の配列 P のうち, $\overline{P}$ の右端の桁が 2 となるものの個数を a_n とするとき, 以下の問に答えよ.

- (1) $a_4 - a_2, a_5 - a_3$ を求めよ. ただし, 結論のみでよい.
- (2) $n \geq 4$ のとき, $a_n - a_{n-2}$ を求めよ.
- (3) a_{2m} を求めよ. ただし, m は正の整数とする.

Ⅲ. 変数 θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする. 点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ における単位円の接線を ℓ とし, P との距離が θ である ℓ 上の 2 点のうち, 原点と P を通る直線に関して点 $A(1, 0)$ と同じ側にある点を $Q(x, y)$ とする. θ が上の範囲を動くとき Q の描く曲線と, x 軸, y 軸, および直線 $y = 1$ とで囲まれる図形の面積を S とする. 以下の問に答えよ.

(1) x, y を θ で表せ.

(2) 定積分 $\int_1^{\frac{\pi}{2}} y \, dx, \int_0^1 x \, dy$ をそれぞれ θ を変数とする定積分で表せ.

(3) S を求めよ.

IV. 空間内の 6 点 $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ を頂点とする正八面体 T と, 原点 O を中心とし, O から T の辺の中点までの距離を半径とする球 S を考える. T と S との共通部分を A , T のうち S に含まれない部分を B , S のうち T に含まれない部分を C とする. A, B, C の体積をそれぞれ a, b, c で表すとき, 以下の問に答えよ.

(1) b と c の大小を比較せよ.

(2) a, b, c の大小を比較し, 大きい順に並べよ.

V. 放物線 $y = \frac{x^2}{2}$ のうち, $0 \leq x \leq 1$ の部分を C とする. C 上の点 $P(x, y)$ に対し, 原点 O から P までの C の部分の長さを s で表す. x と y を s の関数とみなして $x = f(s)$, $y = g(s)$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\{f'(s)\}^2 + \{g'(s)\}^2$ の値を求めよ.

(2) 次の等式を示せ.

$$f''(s) = -\frac{1}{(1 + \{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}g'(s), \quad g''(s) = \frac{1}{(1 + \{f(s)\}^2)^{\frac{3}{2}}}f'(s).$$

(3) P における C の法線上にあり, P との距離が正の定数 a である 2 点のうち, C の下側にあるものを $Q(v, w)$ とする. v, w を $f(s)$, $g(s)$, $f'(s)$, $g'(s)$ を用いて表せ.

(4) C の長さを L とし, P が C 全体を動くときの, Q の描く曲線の長さを M とする. $M - L$ を求めよ. ただし, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ を用いてもよい.