

①

ア. 2

イ. 19

ウ. 2005

エ. 133

2

$y = 0$ 上に頂点を 1 個もつ場合と、 $y = 1$ 上に頂点を 1 個もつ場合とで面積の総和は等しいから、 $y = 0$ 上に 2 頂点 $(k, 0)$, $(m, 0)$, $y = 1$ 上に 1 頂点 $(l, 1)$ がある場合の総和を求めて 2 倍する。ただし、 $0 \leq k < m \leq n$, $0 \leq l \leq n$

三角形の面積は $\frac{1}{2}(m-k) \cdot 1$ となって l に依らない。

l は $n+1$ 通りの値をとるから、求める総和は

$$\begin{aligned}
 S &= 2(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=k+1}^n \frac{1}{2}(m-k) \\
 &= (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} (1+2+\cdots+n-k) \\
 &= (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1) \\
 &= \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1)) \\
 &= \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3} \{ (1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2) + (2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3) + \cdots \\
 &\quad \cdots + n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \} \\
 &= \frac{n+1}{6} \cdot n(n+1)(n+2) = \frac{1}{6} n(n+1)^2(n+2)
 \end{aligned}$$

[3]

円 O_n の半径 r_n は, 中心 $(0, p_n)$ と放物線 $y = x^2$ の点 (t, t^2) との距離の最小値に等しい。 $(0, p_n)$ と (t, t^2) の距離の 2 乗は,

$$(t-0)^2 + (t^2 - p_n)^2 = t^4 + (1-2p_n)t^2 + p_n^2$$

$$= \left(t^2 - \left(p_n - \frac{1}{2} \right) \right)^2 + p_n - \frac{1}{4}$$

$p_1 = \frac{1}{2} < p_2 < \dots < p_n < \dots$ より, $t^2 = p_n - \frac{1}{4}$ のときに最小で,

$$r_n^2 = p_n - \frac{1}{4} \quad \therefore \quad p_n = r_n^2 + \frac{1}{4}$$

ところで, $p_{n+1} - p_n = r_{n+1} + r_n$ より,

$$r_{n+1}^2 + \frac{1}{4} - \left(r_n^2 + \frac{1}{4} \right) = r_{n+1} + r_n$$

$$r_{n+1}^2 - r_{n+1} - r_n(r_n + 1) = 0$$

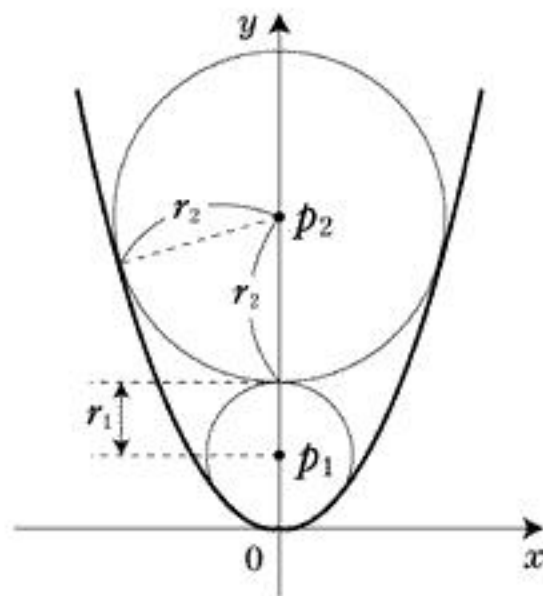
$$(r_{n+1} - r_n)(r_{n+1} - r_n - 1) = 0$$

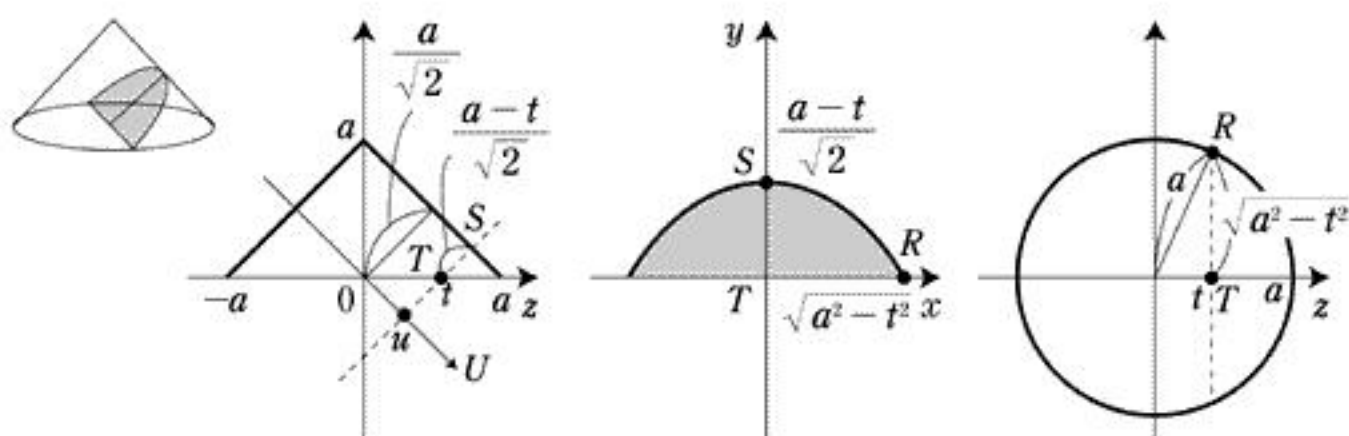
右図より $r_{n+1} > r_n$ だから, $r_{n+1} = r_n + 1$

$\{r_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公差 1 の等差数列で $r_n = \frac{1}{2} + n - 1 = n - \frac{1}{2}$

よって円 O_n の直径は $2r_n = \underline{\underline{2n-1}}$

$$p_n = \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{n^2 - n + \frac{1}{2}}}$$





直円錐の底円を含む平面上に O を原点として z 軸をとり、 z 軸上の $z=t$ である点を通して、底円と 45° の角をなす平面を P_t とする。

直円錐を P_t で切ったときの切り口は、右上図塗部のような放物線と x 軸で囲まれた図形となる。

$$ST = \frac{a-t}{\sqrt{2}}, \quad RT = \sqrt{a^2 - t^2} \text{ となる。}$$

右上図の放物線を $y = -kx^2 + \frac{a-t}{\sqrt{2}}$ とおくと、 $(\sqrt{a^2 - t^2}, 0)$ を通るから $0 = -k \cdot (a^2 - t^2) + \frac{a-t}{\sqrt{2}} \quad 0 < t < a$ として

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}(a+t)}$$

よって、切り口の面積 $S(t)$ は、

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-\sqrt{a^2 - t^2}}^{\sqrt{a^2 - t^2}} -\frac{1}{\sqrt{2}(a+t)} (x + \sqrt{a^2 - t^2})(x - \sqrt{a^2 - t^2}) dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}(a+t)} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \left\{ \sqrt{a^2 - t^2} - (-\sqrt{a^2 - t^2}) \right\}^3 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} (a-t) \sqrt{a^2 - t^2} \end{aligned}$$

$t=a$ のとき $S(a)=0$

(1) 直円錐を P で切ったときの切り口の面積は $S(0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^2$

(2) 求める体積は、図のように平面 P と垂直に点 O を通るように u 軸をとると、 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}t$, $du = \frac{1}{\sqrt{2}}dt$, $t:0 \rightarrow a$ のとき、
 $u:0 \rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \text{求める体積は, } V &= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} S(t) du = \int_0^a S(t) \frac{1}{\sqrt{2}} dt \\ &= \int_0^a \frac{2\sqrt{2}}{3} (a-t) \sqrt{a^2 - t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt \\ &= \frac{2a}{3} \int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} dt - \frac{2}{3} \int_0^a t \sqrt{a^2 - t^2} dt \end{aligned}$$

第1項の積分は、右図塗部の面積

(円の $\frac{1}{4}$) に相当し、 $\frac{\pi a^2}{4}$

第2項の積分は、 $\sqrt{a^2 - t^2} = s$ と

おくと $a^2 - t^2 = s^2$

$-2t dt = 2s ds$, $t:0 \rightarrow a$ のとき $s:a \rightarrow 0$

$$\int_0^a t \sqrt{a^2 - t^2} dt = \int_a^0 s(-s ds) = \int_0^a s^2 ds = \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$\therefore V = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\pi a^2}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{3} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) a^3$$

