

I. (1) $f(x) = ax + 2$, $y = ax + 2$ を x について解くと、 $x = \frac{1}{a}y - \frac{2}{a}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{2}{a}$$

$$f(f(x)) = a(ax + 2) + 2 = a^2x + 2a + 2$$

$$f(f(f(x))) = a(a^2x + 2a + 2) + 2 = a^3x + 2a^2 + 2a + 2$$

$$f(f(f(x))) = f^{-1}(x) \text{ より、} \frac{1}{a} = a^3 \text{ かつ } -\frac{2}{a} = 2a^2 + 2a + 2$$

$$\therefore a^4 - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = 0 \text{ かつ } a^3 + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^2 + 1) = 0$$

a は実数だから $a = -1$

(2) $P(t, t)$, $Q(s, -s)$ とおける。 $\overline{PQ} = 3\sqrt{2}$ より

$$(t - s)^2 + (t + s)^2 = (3\sqrt{2})^2 \text{ 整理して } t^2 + s^2 = 9$$

これより $t = 3\cos\theta$, $s = 3\sin\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおける。

$$R(X, Y) \text{ として } X = \frac{t + 2s}{3} = \frac{1}{3}(3\cos\theta + 6\sin\theta) = \cos\theta + 2\sin\theta$$

$$= \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha), \text{ 但し } \alpha \text{ は } \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ をみたす角}$$

$$-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1 \text{ より、} X \text{ は } \theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ つまり、} \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$t = \frac{3}{\sqrt{5}}, s = \frac{6}{\sqrt{5}} \text{ のときに、} \underline{\text{最大値 } \sqrt{5}}$$

$$\text{II (1) } y \neq 0 \text{ と仮定すると、} J = -\frac{x}{y} E, J^2 = \frac{x^2}{y^2} E^2 = \frac{x^2}{y^2} E = -E$$

$$\therefore \frac{x^2 + y^2}{y^2} E = 0 \quad \therefore x^2 + y^2 = 0 \quad \text{ところが } y^2 > 0, x^2 \geq 0 \text{ より、}$$

$x^2 + y^2 = 0$ になり得ないので不合理。これは $y \neq 0$ とした仮定が誤りであることを意味する。 $\therefore y = 0$ このとき $x E = 0$ より $x = 0$ よって題意は示された。

$$(2) \text{ ケーリー・ハミルトンの定理より、} A^2 - 4A + 7E = 0$$

$$\therefore (aE + bJ)^2 - 4(aE + bJ) + 7E = (a^2 - b^2 - 4a + 7)E + 2(a - 2)bJ = C$$

$$J^2 = -E \text{ だから (1) を用いると } a^2 - b^2 - 4a + 7 = 0 \cdots \textcircled{1} \text{ かつ } 2(a - 2)b = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } a = 2 \text{ または } b = 0$$

$$(i) \ a = 2 \text{ のとき、} \textcircled{1} \text{ より } 4 - b^2 - 8 + 7 = 0 \quad \therefore b^2 = 3 \quad \therefore b = \pm\sqrt{3}$$

$$(ii) \ b = 0 \text{ のとき、} \textcircled{1} \text{ より } a^2 - 4a + 7 = 0 \quad \therefore a = 2 \pm \sqrt{3}i \text{ 不適}$$

$$(i) \text{ のとき } J = \frac{1}{b} (A - aE) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (A - 2E) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{以上より } a = 2, \ b = \pm\sqrt{3}, \ J = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (複号同順)}$$

Ⅲ (1) 2つのサイコロの出た目を a, b とすると

$|a - b| = 0$ となるのが $a = b = 1, \dots, a = b = 6$ の 6 通り

$|a - b| = 1$ となるのが $a = 1$ かつ $b = 2, \dots, a = 5$ かつ $b = 6,$

$b = 1$ かつ $a = 2, \dots, b = 5$ かつ $a = 6$ の 10 通り

a, b の出方は $6 \times 6 = 36$ 通り

$$A \text{ が起こる確率 } P(A) = \frac{6+10}{36} = \frac{4}{9}$$

(2) A の余事象を $\bar{A}$ とする。 m 回目にはじめて A が起こるのは、

$\underbrace{\bar{A}, \bar{A}, \dots, \bar{A}}_{m-1 \text{ 回}}, A$ となるときで、その確率は、

$$P(\bar{A})^{m-1} \cdot P(A) = \left(\frac{5}{9}\right)^{m-1} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 5^{m-1}}{9^m}$$

(3) $2k$ 回目 ($k = 1, 2, \dots, n$) ではじめて A が起こる確率は、

$$(2) \text{ で } m = 2k \text{ として } \frac{4 \cdot 5^{2k-1}}{9^{2k}} = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{25}{81}\right)^k$$

$$\therefore P_n = \sum_{k=1}^n \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{25}{81}\right)^k = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{81} \cdot \frac{1 - \left(\frac{25}{81}\right)^n}{1 - \frac{25}{81}} = \frac{5}{14} \{1 - \left(\frac{25}{81}\right)^n\}$$

$$P_n > \frac{2}{7} \text{ のとき } \frac{5}{14} \{1 - \left(\frac{25}{81}\right)^n\} > \frac{2}{7} \quad \therefore \left(\frac{25}{81}\right)^n < \frac{1}{5}$$

$$\frac{25}{81} < \frac{27}{81} = \frac{1}{3} \text{ より } \left(\frac{25}{81}\right)^2 < \frac{1}{9} < \frac{1}{5}, \quad \frac{25}{81} > \frac{25}{100} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5} \text{ より,}$$

$$P_n > \frac{2}{7} \text{ となる最小の } n \text{ は } \underline{n=2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV (1)} \quad & \log(a_1-1) + \log(a_2-1) + \log(a_3-1) + \log(a_3+1) \\
 &= \log(a_1-1) + \log(a_2-1) + \log(a_3-1)(a_3+1) \\
 &= \log(a_1-1) + \log(a_2-1) + \log(a_3^2-1) = \log(a_1-1) + \log(a_2-1) + \log(a_2+2-1) \\
 &= \log(a_1-1) + \log(a_2^2-1) = \log(a_1-1) + \log(a_1+2-1) = \log(a_1^2-1) = \underline{0}
 \end{aligned}$$

(2) (i) $n=1$ のとき $-2 < -\sqrt{2} < -1$ の各辺に 2 を加えて $0 < 2 - \sqrt{2} < \underline{1}$ より、
 $0 < 2 - a_1 < \frac{1}{2^{1-1}}$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき $0 < 2 - a_k < \frac{1}{2^{k-1}}$ が成り立つとする。

定義から $a_{k+1} > 0$ であって、 $\frac{1}{a_{k+1}+2} < \frac{1}{2}$ である。

$$(2 + a_{k+1})(2 - a_{k+1}) = 4 - a_{k+1}^2 = 4 - (2 + a_k) = 2 - a_k > 0$$

$2 + a_{k+1} > 0$ より $2 - a_{k+1} > 0$ である。

$$\text{また、} 2 - a_{k+1} = \frac{1}{2 + a_{k+1}} \cdot (2 - a_k) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}$$

よって $n=k+1$ のときも与不等式が成立する。

(i), (ii) より、全ての整数 n について、 $0 < 2 - a_n < \frac{1}{2^{n-1}}$ が成り立つ。

(3) $S_m = \sum_{n=1}^m \log(a_n-1)$ とおくと (1) と同様にして、

$$\begin{aligned}
 S_m + \log(a_m+1) &= \sum_{n=1}^{m-1} \log(a_n-1) + \log(a_m-1)(a_m+1) \\
 &= \sum_{n=1}^{m-1} \log(a_n-1) + \log(a_{m-1}+2-1) = \cdots = 0
 \end{aligned}$$

$\therefore S_m = -\log(a_m+1)$, (2) の不等式に -1 をかけて 3 を加えると、

$$\begin{aligned}
 3 > a_m+1 > 3 - \frac{1}{2^{m-1}} \quad \text{ここで } m \rightarrow \infty \text{ とすると } 3 - \frac{1}{2^{m-1}} \rightarrow 3 \text{ ゆえ、はさみ} \\
 \text{うちの原理より } a_m+1 \rightarrow 3 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n-1) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \underline{-\log 3}
 \end{aligned}$$

V (1) $a=b=1$ のとき、 $c_2: y=e^x \cos x$

求める面積 S は、右図斜線部の面積。

$$S = \int_0^{2\pi} (e^x - e^x \cos x) dx$$

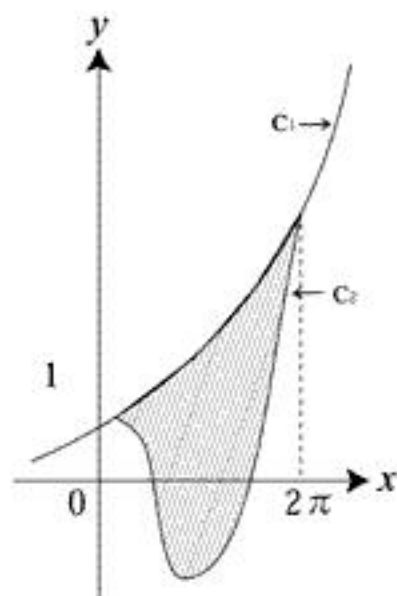
$$\int_0^{2\pi} e^x dx = [e^x]_0^{2\pi} = e^{2\pi} - 1$$

$$I = \int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = [e^x \cos x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x (-\sin x) dx$$

$$= e^{2\pi} - 1 + [e^x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = e^{2\pi} - 1 - I$$

$$\therefore 2I = e^{2\pi} - 1 \quad \therefore I = \frac{1}{2} (e^{2\pi} - 1)$$

$$\therefore S = e^{2\pi} - 1 - \frac{1}{2} (e^{2\pi} - 1) = \frac{1}{2} (e^{2\pi} - 1)$$



(2) $e^x = be^{ax} \cos x = be^{(1+\tan \theta)x} \cos x$ とおくと、 $e^x > 0$ より、

$1 = be^{(\tan \theta)x} \cos x$, この右辺を $f(x)$ とおくと、……①

$$f'(x) = be^{(\tan \theta)x} (\tan \theta \cos x - \sin x)$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = -be^{(\tan \theta) \cdot \frac{\pi}{2}} < 0 \text{ また } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ として } f'(x) = 0 \text{ と}$$

すると、 $\tan x = \tan \theta$ より、

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } 0 < x < \pi \text{ より } x = \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0 \text{ のとき } x = \theta + \pi$$

(i) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

x	0	θ	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	↘	↘

増減表より $f(x)$ の $0 < x < \pi$ における最大値

$$\text{は } f(\theta) = be^{\theta \tan \theta} \cos \theta$$

c_1, c_2 が交点を持たない $\Leftrightarrow$ ①が解を持たない

$$\Leftrightarrow be^{\theta \tan \theta} \cos \theta \leq 1 \quad (b > 0)$$

$$\therefore 0 < b < \frac{1}{e^{\theta \tan \theta} \cos \theta}$$

(ii) $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0$ のとき

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi + \theta$	π
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	↗	↗

$$f(\pi) = -be^{(\tan \theta)\pi} < 0, \text{ 及び増減表より } f(x)$$

の $0 < x < \pi$ における最大値は $f(0) = b$

c_1, c_2 が交点を持たない $\Leftrightarrow 0 < b \leq 1$

($0 < x < \pi$ では $f(x) < b$ だから $b=1$ でもよい)

$$\text{以上より、} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } 0 < b < \frac{1}{e^{\theta \tan \theta} \cos \theta}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0 \text{ のとき } 0 < b \leq 1$$

(交点は接点も含むとした)