

数 学

(問 題)

(2004年度 早稲田大学政治経済学部)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は2～3ページに記載されている。
3. 問1，問2，問3，問4，問5の全問を解答せよ。
4. 解答はすべて解答用紙の所定欄に**HB**の黒鉛筆または**HB**のシャープペンシルで記入すること。コンパス，定規は使用してもよい。
5. 受験番号および氏名は解答用紙の所定欄（2か所）に記入すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

問1 次の空欄にあてはまる数値または式等を解答欄に記入せよ。ただし、アは t の式、イは s の式、ウからケまでは数値で答えよ。

$\triangle OAB$ において考える。

辺 OA を $3:2$ に内分する点を C 、辺 OB を $3:4$ に内分する点を D とする。線分 AD と線分 BC との交点を P とし、 $AP:PD = t:1-t$ ($0 < t < 1$)、 $BP:PC = 1-s:s$ ($0 < s < 1$)、とする。また $\vec{a} = \vec{OA}$ 、 $\vec{b} = \vec{OB}$ とする。

$\vec{OP}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 t 、 s を使って2通りに表すと、

$$\vec{OP} = (1-t)\vec{a} + \boxed{\text{ア}} \vec{b}$$

$$\vec{OP} = \boxed{\text{イ}} \vec{a} + s\vec{b}$$

となる。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく平行ではないから

$$\begin{cases} 1-t = \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ア}} = s \end{cases}$$

が成立する。これを解いて、 $t = \boxed{\text{ウ}}$ 、 $s = \boxed{\text{エ}}$ である。

よって

$$\vec{OP} = \boxed{\text{オ}} \vec{a} + \boxed{\text{カ}} \vec{b}$$

と表せる。

$\triangle OPA$ 、 $\triangle PDB$ の面積をそれぞれ $S_1:S_2$ とすると、 $\triangle OAB$ の面積を S とすると

$$S_1 = \boxed{\text{キ}} S, S_2 = \boxed{\text{ク}} \times \frac{6}{13} S = \boxed{\text{ケ}} S$$

となる。よって

$$S_1:S_2 = \boxed{\text{コ}} \quad (\text{コは最も簡単な自然数の比で答えよ。})$$

問2 次の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(1) 次の空欄に最もあてはまる数値を解答欄に記入せよ。

方程式 $z^7 = 128$ の解を極形式で表すと、

$$z = \boxed{\text{ア}} \left(\cos \frac{360^\circ \times n}{\boxed{\text{イ}}} + i \sin \frac{360^\circ \times n}{\boxed{\text{イ}}} \right)$$

である。ただし、 n は整数で $0 \leq n \leq \boxed{\text{ウ}}$ 。

(2) 方程式 $z^3 - 6iz^2 - 12z + 8i = 27$ を解け。

問3 n を自然数とする。 $n, n+2, n+4$ がすべて素数であるのは $n=3$ の場合だけであることを示せ。

問4 実数 x, y の方程式

$$(A) \quad 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 5y + 2 = 0$$

について、次の各問いに答えよ。

(1) y の値の範囲を解答欄に記入し、その理由を書け。

(2) 方程式 (A) の解で、 x と y が共に整数であるものをすべて解答欄に記入し、その理由を書け。

問5 放物線 $C: y = 25 - 36x^2$, $0 \leq x$, がある。

C と x 軸と直線 $x = a$ で囲まれる図形の面積を S_1 , C と x 軸と直線 $x = a+1$ で囲まれる図形の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 の和を S とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ とする。

(1) S を a の式で表せ。

(2) S の最大値と最小値を求めよ。また、その場合の a の値を示せ。

[以下余白]