

数 学

(問 題)

(2004 教育)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は4～5ページに記載されている。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. 受験番号および氏名は解答用紙の所定欄（2か所）に記入すること。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

1 次の にあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) 辺の長さが 5, 12, 13 である三角形の内接円の半径は ア である。

(2) 関数 $2(\cos x)^{16} + 19(\sin x)^{16}$ の最大値は イ である。

(3) 実数 x に対して, $f_1(x) = |x| - 1$ とする。

さらに, 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ と定義する。

このとき, 方程式 $f_{2004}(x) = 0$ の解の個数は ウ である。

(4) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2000}$ は整数で, 次の条件を満たしている。

(i) $-1 \leq x_n \leq 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 2000$)

(ii) $\sum_{n=1}^{2000} x_n = 19$

(iii) $\sum_{n=1}^{2000} x_n^2 = 99$

このとき, $\sum_{n=1}^{2000} x_n^3$ のとりうる最大値は エ である。

2 n を自然数とする。座標平面上の $2n + 2$ 個の点からなる集合

$$L = \{(x, y) \mid x, y \text{ は整数}, 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq 1\}$$

のうちの 3 点を頂点とする三角形をすべて考える。

これらの三角形の面積の総和を求めよ。

3 座標平面上で、 $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n, \dots$ はすべて円であり、
次の条件を満たしている。

(1) O_1 は、中心 $(0, \frac{1}{2})$ 、半径 $\frac{1}{2}$ の円である。

(2) 各 O_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) の中心は y 軸上にあり、
その座標を $(0, p_n)$ とすると、 $0 < p_n < p_{n+1}$ である。

(3) 各 O_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は放物線 $y = x^2$ に接し、
 O_{n+1} は O_n に外接している。

このとき、円 O_n の直径、およびその中心の y 座標 p_n を求め、
 n の式で表せ。

4 中心 O 、半径 a の円を底面とし、高さが a の直円錐がある。

点 O を通り、底面と 45° の角度で交わる平面を P とする。

(1) この円錐を P で切るとき、その切り口の面積を求めよ。

(2) P はこの円錐を 2 つの部分に分けるが、そのうちの
小さい方の体積を求めよ。

[以 下 余 白]