

数 学

問 題

2004年度 早稲田大学理工学部

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙には、試験開始の合図があるまで手をふれないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。
4. すべての解答用紙の所定欄（各2か所）に受験番号および氏名を記入してください。
5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に、黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入してください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 問題冊子は持ち帰ってください。
8. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出してください。

I. 以下の間に答えよ。

- (1) 実数 a に対して $f(x) = ax + 2$ とする。 $f(f(f(x)))$ が $f(x)$ の逆関数になるような a を求めよ。
- (2) 長さ $3\sqrt{2}$ の線分 PQ が座標平面上にあり、点 P は直線 $y = x$ 上を、点 Q は直線 $y = -x$ 上を動くとする。このとき、線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R の x 座標の最大値を求めよ。

II. E を 2 次の単位行列とし、また、 O を 2 次の零行列とする。以下の間に答えよ。

- (1) 2 次正方行列 J が $J^2 = -E$ を満たしているとき、 $xE + yJ = O$ となる実数 x, y は $x = y = 0$ のみであることを示せ。
- (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$A = aE + bJ, \quad J^2 = -E$$

を同時に満たす実数 a, b および 2 次正方行列 J を求めよ。

III. 2 つのサイコロを同時に投げる試行 T を行うとする。この試行 T においてサイコロの出た目の差の絶対値が 1 以下である事象を A で表す。以下の間に答えよ。

- (1) A が起こる確率を求めよ。
- (2) 試行 T をくり返して m 回目に初めて A が起こる確率を求めよ。
- (3) n を正の整数とする。試行 T をくり返し、 $2n$ 回以下の偶数回目で初めて A が起こる確率 p_n を求めよ。また p_n が $\frac{2}{7}$ より大きくなる最小の n を求めよ。

IV. 初項が $a_1 = \sqrt{2}$ で、漸化式

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について以下の問に答えよ。

- (1) $\log(a_1 - 1) + \log(a_2 - 1) + \log(a_3 - 1) + \log(a_3 + 1)$ の値を求めよ。
- (2) すべての正の整数 n について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 < 2 - a_n < \frac{1}{2^{n-1}}$$

- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n - 1)$ を求めよ。

V. a, b は実数で $b > 0$ とし、2つの曲線 $C_1: y = e^x$, $C_2: y = b e^{ax} \cos x$ を考える。以下の問に答えよ。

- (1) $a = b = 1$ のとき、 $0 \leq x \leq 2\pi$ において C_1, C_2 によって囲まれる部分の面積を求めよ。
- (2) $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ として $a = 1 + \tan \theta$ とおく。 $0 < x < \pi$ において C_1, C_2 が交点を持たないような正の実数 b の範囲を θ を用いて表せ。

[以 下 余 白]