

数 学

(問 題)

(2004年度 早稲田大学社会科学部)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は2～5ページに記載されている。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄に黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入すること。
4. 受験番号および氏名は、解答用紙の所定欄（2か所）に記入すること。
5. コンパス、定規を使用してもよい。
6. 計算の途中経過は記述すること。
7. 問題冊子は持ち帰ること。

1

定数 a を $a > 0, a \neq 1$ とし, $f(x), g(x)$ はそれぞれ x の関数とする。

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$g(x) = \log_a f(x)$$

また, 関数 $g(x)$ の最小値は a の関数なので, これを $m(a)$ で表す。

このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ (増減表をかけ)。
- (2) 関数 $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $a > 1$ のとき, $m(a)$ を求めよ。
- (4) $0 < a < 1$ のとき, $m(a)$ を求めよ。
- (5) $m(a) = 2, m(a) = -2$ となる a の値をそれぞれ求めよ。

2

a を定数とする放物線

$$y = x^2 - 2(a+1)x + 1 \text{ ----- ①}$$

について、次の問に答えよ。

- (1) 放物線①の頂点Pの座標を求めよ。
- (2) 放物線①が x 軸と異なる2点A, Bで交わるような a の値の範囲を求めよ。
- (3) 三角形PABが正三角形となるとき、 a の値を求めよ。
- (4) 放物線①と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 、正三角形PABの面積を S_2 とすると、比 $S_1:S_2$ を求めよ。

n を自然数とすると、
連続した n 個の自然数の積は、 n の階乗

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots \cdots \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

で割り切れる。

自然数 n に関するこの命題を、数学的帰納法によって、次のように証明した。

〈証明〉

〔1〕 $n = 1$ のときは明らかにこの命題は成り立つ。

〔2〕 任意の自然数 k に対して、 $n = k$ のときにこの命題が成り立つ、すなわち、連続した k 個の自然数の積は $k!$ で割り切れる、と仮定する。

m を自然数として、連続した $k+1$ 個の自然数の積を

$$f(m) = m(m+1)(m+2) \cdots \cdots \cdots (m+k-1)(m+k)$$

とおく。

$m = 1$ のときは

$$f(1) = \boxed{\quad \text{①} \quad}$$

なので、 $f(m)$ は $(k+1)!$ で割り切れる。

$m \geq 2$ のとき

$$f(m+1) - f(m) = (k+1)g(m) \cdots \cdots \cdots (A)$$

$$\text{ただし、} g(m) = \boxed{\quad \text{②} \quad}$$

となる。等式 (A) で、 m に

$$m-1, m-2, m-3, \cdots \cdots \cdots, 2, 1$$

を順次代入した式を考え、これら $m-1$ 個の等式の辺々を加えると、

$$f(m) - f(1) = (k+1) \sum_{i=\text{㉓}}^{\text{㉔}} g(i)$$

が得られ,

$$f(m) = f(1) + (k+1) \sum_{i=\text{㉓}}^{\text{㉔}} g(i) \quad \text{----- (B)}$$

となる。等式 (B) において, $f(1)$ は $(k+1)!$ で割り切れ,

さらに, $\sum_{i=\text{㉓}}^{\text{㉔}} g(i)$ は $k!$ で割り切れるので, $f(m)$ は $(k+1)!$ で割り切れる。

以上より, $n=k+1$ のときもこの命題は成り立つ。

したがって, $[1], [2]$ から, この命題はすべての自然数 n について成り立つ。

このとき, 次の問に答えよ。

- (1) ㉑ にあてはまる数または式を求めよ。
- (2) ㉒ にあてはまる数または式を求めよ。
- (3) ㉓, ㉔ にあてはまる数または式をそれぞれ求めよ。
- (4) 証明の中で を付した

$\sum_{i=\text{㉓}}^{\text{㉔}} g(i)$ は $k!$ で割り切れることの理由を詳しく説明せよ。

[以 下 余 白]