

1

$$(1) \quad \text{ア} : 45$$

$$\text{イ} : \frac{9}{2}$$

$$(2) \quad \text{ウ} : \frac{-21 \pm \sqrt{66}}{15}$$

(1) $x=1$ のとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2y} = \frac{z-1}{3z}$$

$$\Leftrightarrow 2y = \frac{3z}{z-1} \quad (\because y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2y = 3 + \frac{3}{z-1} \cdots \textcircled{2} \quad \text{である。}$$

②で特に、左辺よりその値は整数であるから、右辺に注目して、 $\frac{3}{z-1}$ は整数でなければならない。

ここで、 $z-1 \geq 0$ であるから、結局

$$z-1 = (3 \text{ の } 0 \text{ 以上の約数}) = 1, 3$$

$\therefore z = 2, 4 \cdots \textcircled{3}$ でないといけない。

逆に③のとき、②よりそれぞれ $y = 3, 2$ となり、確かに①の解。

以上より、 $(y, z) = (3, 2), (2, 4) \cdots$ (答)

(2) $y \geq 1, z \geq 1$ より

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{である。従って、}$$

①より

$$\frac{4}{3} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \quad \cdots \#$$

よって、 $(1 \leq) x \leq 2 \cdots \textcircled{4}$ でなくてはならない。

逆に x が④の範囲にあるとき、

$x=1$ のとき、(1)より $(x, y, z) = (1, 2, 4), (1, 3, 2)$ が解。

$x=2$ のとき、#の議論から

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \leq \frac{4}{3}$$

かつ、等号は $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ とわかるので、①より解は $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ となり、確かに①の解が存在する。 $\cdots \# \#$

以上より、④が求める範囲で、答は $1 \leq x \leq 2 \cdots$

(答)

(3) # # のところの議論より、解は

$$(x, y, z) = (1, 2, 4), (1, 3, 2), (2, 1, 1) \cdots \text{(答)}$$

3

$$(1) \quad \frac{x^2 - 1}{2}$$

$$(2) \quad 18$$

(1) 一般に、実数 α, β, γ に対し、

$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ のグラフは、 $\begin{cases} \alpha \neq 0 \text{ のとき放物線} \\ \alpha = 0 \text{ のとき直線} \end{cases}$

を表すので、題意の条件は、(式の2次係数に注目して)

$a = \pm 2 \cdots$ (答) である。

(2) $\cdot a = 2$ のとき、 $l: y = 2bx + 1 \cdots \textcircled{1}$

$$m: y = 4x^2 - 2bx + b^2 \cdots \textcircled{2}$$

の交点は、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ を連立して解いて得られる。

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より x の条件は

$$4x^2 - 4bx + (b^2 - 1) = 0$$

$$\therefore \{2x - (b - 1)\} \{2x - (b + 1)\} = 0 \quad \text{より}$$

$$x = \frac{b \pm 1}{2} \text{ で、}$$

これら各々を $\textcircled{1}$ (または $\textcircled{2}$)に代入して、

$$(x, y) = \left(\frac{b \pm 1}{2}, b^2 \pm b + 1 \right) \quad (\text{複号同順}) \cdots \textcircled{3}$$

$\cdot a = -2$ のとき、 $l: y = -4x^2 + 2bx + 1 \cdots \textcircled{4}$

$$m: y = -2bx + b^2 \cdots \textcircled{5}$$

の交点は、 $\textcircled{4}$ と $\textcircled{5}$ を連立して解いて得られ、上と同様にして、

$$(x, y) = \left(\frac{b \pm 1}{2}, \mp b \right) \quad (\text{複号同順}) \cdots \textcircled{6}$$

以上、 $\textcircled{3}, \textcircled{6}$ から

$\cdot a = 2$ のとき、 $\left(\frac{b \pm 1}{2}, b^2 \pm b + 1 \right)$ (複号同順)

$\cdot a = -2$ のとき、 $\left(\frac{b \pm 1}{2}, \mp b \right)$ (複号同順)

$\cdots$ (答)

(3) $\cdot a = 2$ のとき、交点の x 座標は $\frac{b-1}{2} < \frac{b+1}{2}$ であるから

囲むのは $\frac{b-1}{2} \leq x \leq \frac{b+1}{2}$ の範囲。

この範囲で、 $(2bx + 1) - (4x^2 - 2bx + b^2)$

$$= -4 \left(x - \frac{b-1}{2} \right) \left(x - \frac{b+1}{2} \right) \geq 0$$

なので、 l が m より上側にある。従って、

$$(\text{求める面積}) = \int_{\frac{b-1}{2}}^{\frac{b+1}{2}} -4 \left(x - \frac{b-1}{2} \right) \left(x - \frac{b+1}{2} \right) dx$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{b+1}{2} \right)^3 - \left(\frac{b-1}{2} \right)^3 \right\} = \frac{2}{3}$$

$\cdot a = -2$ のとき、このときも

$$(\text{差の関数}) = -4 \left(x - \frac{b-1}{2} \right) \left(x - \frac{b+1}{2} \right) \text{ となるので}$$

$$\text{全く同じ計算になり、} (\text{求める面積}) = \frac{2}{3}$$

以上より、求める図形の面積は

$$(a = 2 \text{ か } a = -2 \text{ かによらず}) \frac{2}{3} \cdots \text{(答)}$$