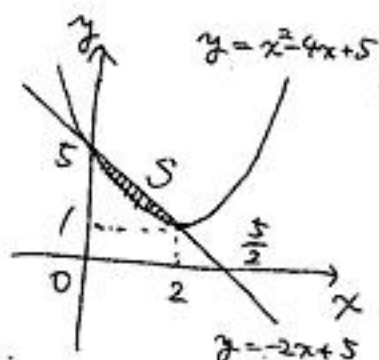


$$1. \quad (1) \begin{cases} y \geq (x-2)^2 + 1 \\ y \leq -2x + 5 \end{cases}$$

を図示すると右図の斜線部のようになり、境界を含む。
その面積 S は、



$$S = \int_0^2 \{-2x + 5 - (x^2 - 4x + 5)\} dx \\ = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3} \quad \dots (\frac{4}{3})$$

(2) $x + y = k$ とし、直線 $y = -x + k$ と 2 の領域の
共有点の存在について調べる。

2 の直線の傾きは -1 だから、 k が最小となるのは
放物線と接するとき、それは方程式

$$x^2 - 3x + 5 - k = 0$$

が重解をもつとき、つまり、

$$9 - 4(5 - k) = 0$$

$$\therefore k = \frac{11}{4}, \quad x = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{5}{4}$$

また、 k が最大となるのは、図より $(x, y) = (0, 5)$
のときだから、

$$\begin{cases} (x, y) = (0, 5) \text{ のとき、最大値 } 5 \\ (x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{4}) \text{ のとき、最小値 } \frac{11}{4} \end{cases} \\ \dots (\frac{5}{2})$$

$$(3) \quad \log_4 2^x + \log_{64} 2^y = \frac{\log_2 2^x}{\log_2 2^2} + \frac{\log_2 2^y}{\log_2 2^6} \\ = \frac{x}{2} + \frac{y}{6}$$

となるから、 $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = m$ とし、(2) と同様
直線 $y = -3x + 6m$ と 斜線部の領域の
共有点の存在について調べる。

2 の直線の傾きは -3 であり、放物線の $(0, 5)$ に
おける傾きは -4 だから、 m が最小となるのは
放物線と接するとき、それは方程式

$$x^2 - x + 5 - 6m = 0$$

が重解をもつとき、つまり、

$$1 - 4(5 - 6m) = 0$$

$$\therefore m = \frac{19}{24}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{13}{4}$$

また、 m が最大となるのは、図より $(x, y) = (2, 1)$
のときだから、

$$\begin{cases} (x, y) = (2, 1) \text{ のとき、最大値 } \frac{7}{6} \\ (x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{13}{4}) \text{ のとき、最小値 } \frac{19}{24} \end{cases} \\ \dots (\frac{7}{2})$$

2. (1) 与えられた漸化式から,

「 x_n, y_n を 5 で割ったときの余りは
それぞれ 1, 0 である」... (※)

と推定される。これを数学的帰納法により示す。

(I) $n=1$ のとき, $x_1=1, y_1=5$ により

(※) は正しい。

(II) $n=k$ のとき (※) が正しいと仮定すると,

$x_k + y_k$ を 5 で割ったときの余りは

$1+0=1$ となるから x_n に対して $n=k+1$

のときも余りは 1 となる。また, $5x_k$ と y_k

を 5 で割り切れるから y_{k+1} の余りは 0

となり, $n=k+1$ のときも (※) は正しい。

(I)(II) より, すべての自然数 n に対して

(※) は正しい。

$$\begin{cases} x_n : 1 \\ y_n : 0 \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) a_{n+1} = x_{n+1} + cy_{n+1}$$

$$= x_n + y_n + c(5x_n + y_n)$$

$$= (1+5c)x_n + (1+c)y_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

より, $a_{n+1} = ra_n$ (r は定数) となる。

$$\begin{cases} 1+5c = r \\ 1+c = rc \end{cases}$$

$$\therefore c = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, r = 1 \pm \sqrt{5} \quad (\text{複号同順})$$

$$\therefore a_1 = x_1 + cy_1 = 1 \pm \sqrt{5} \text{ より,}$$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, a_n = (1 \pm \sqrt{5})^n \quad (\text{複号同順}) \dots (\text{答})$$

(3) (2) の結果より,

$$\begin{cases} x_n + \frac{1}{\sqrt{5}} y_n = (1+\sqrt{5})^n \\ x_n - \frac{1}{\sqrt{5}} y_n = (1-\sqrt{5})^n \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2} \{ (1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n \} \\ y_n = \frac{\sqrt{5}}{2} \{ (1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n \} \end{cases} \dots (\text{答})$$

3. (1) $77 = 7 \cdot 11$ であり, 77 以下の自然数の中で,

7 の倍数は $7, 14, \dots, 77$ の 11 個,

11 の倍数は $11, 22, \dots, 77$ の 7 個

存在する。2 の中で重複するものは 77 のみだから,

$$f(77) = 77 - (11 + 7 - 1) = 60 \quad \dots (\text{答})$$

(2) $f(pq)$ は (1) と全く同様にして

求めることができる,

$$\begin{aligned} f(pq) &= pq - (p + q - 1) \\ &= (p-1)(q-1) \end{aligned}$$

$p < q$ として, 24 が 24 と重なるのは,

$$(p-1, q-1) = (1, 24), (2, 12), \\ (3, 8), (4, 6)$$

2 のうち p, q がともに素数であるものは,

$$(p, q) = (3, 13), (5, 7) \quad \dots (\text{答})$$

(3) $2^k 3^m$ 以下の自然数の中で,

2 の倍数は $2, 4, \dots, 2^k 3^m$ の $2^{k-1} 3^m$ 個,

3 の倍数は $3, 6, \dots, 2^k 3^m$ の $2^k 3^{m-1}$ 個

存在する。2 の中で重複するものは

$$\frac{1}{3} \cdot 2^{k-1} 3^m \left(= \frac{1}{2} \cdot 2^k 3^{m-1} \right) = 2^{k-1} 3^{m-1}$$

個存在するから,

$$\begin{aligned} f(2^k 3^m) &= 2^k 3^m - (2^{k-1} 3^m + 2^k 3^{m-1} - 2^{k-1} 3^{m-1}) \\ &= (6 - 3 - 2 + 1) \cdot 2^{k-1} 3^{m-1} \\ &= 2^k 3^{m-1} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$