

$$(1) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - (a^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) 内接円の中心を I , 半径を r とおくと、 $I(r, r, 0)$ である。
 $\triangle OAB$ を I で 3 分割して、面積を考えると

$$(\triangle OAB =) \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} r (a + b + \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$(\because AB = \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$\therefore r = \frac{ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

よって中心 I の座標は、

$$(r, r, 0) \quad \left(\text{ここで、} r = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right) \quad (\text{答})$$

- (3) 内接球の中心を J , 半径を l とおくと、 $J(l, l, l)$ である。
四面体 $OABC$ を J で 4 分割して、体積を考えると

$$\begin{aligned} (\text{四面体 } OABC =) & \frac{1}{6} abc \\ &= \frac{1}{3} l (\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA + \triangle ABC) \\ &= \frac{1}{6} l (ab + bc + ca + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}) \\ & \quad ((1) \text{より}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore l &= \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \\ &= \frac{abc \{ (ab + bc + ca) - \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \}}{(ab + bc + ca)^2 - \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}^2} \\ &= \frac{ab + bc + ca - \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{2(a + b + c)} \end{aligned}$$

よって中心 J の座標は

$$(l, l, l)$$

$$\left(\text{ここで、} l = \frac{ab + bc + ca - \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{2(a + b + c)} \right)$$

(答)

II

$$(1) \text{ 条件は } \begin{cases} c_1 = c_2 + c_3 & \cdots \textcircled{1} \\ c_2 = c_1 + c_3 & \cdots \textcircled{2} \\ c_3 = c_1 + c_2 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

①-②より $c_1 - c_2 = c_2 - c_1 \therefore c_1 = c_2$ である。

同様にして $c_1 = c_2 = c_3$ がわかり、①よりその値は 0。

$$\therefore (c_1, c_2, c_3) = \boxed{(0, 0, 0)} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad m \geq 7 \text{ のとき、} 1 \leq k \leq m-2 \text{ に対し } c_{k+1} = c_{k+2} + c_k$$

$$\therefore c_{k+2} = c_{k+1} - c_k \cdots \textcircled{4} \text{ である。}$$

④より順次 $c_3, c_4, \dots, c_7$ を定めると

$$c_3 = c_2 - c_1 = b - a, \quad c_4 = c_3 - c_2 = -a,$$

$$c_5 = c_4 - c_3 = -b, \quad c_6 = c_5 - c_4 = a - b$$

$$\therefore c_7 = c_6 - c_5 = \boxed{a} \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad c_1 = a, c_2 = b \text{ とおく。このとき、数列 } \{d_n\} (n \geq 1) \text{ を}$$

$$\cdot d_1 = a, d_2 = b$$

かつ、 $\cdot$ ④と同じ漸化式を満たす

$$(\text{つまり、} d_{n+2} = d_{n+1} - d_n \text{ で定まる})$$

なる数列とする。すると(2)と同様にして

$d_7 = a = d_1, d_8 = b = d_2$ がいえ、 d_n が直前の 2 項だけで決まることとあわせ、 $\{d_n\}$ が周期 6 の数列とわかる。

つまり、((2)の計算により)

$$d_n = \begin{cases} a & (n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 1 \text{ のとき}) \\ b & (n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 2 \text{ のとき}) \\ b-a & (n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 3 \text{ のとき}) \\ -a & (n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 4 \text{ のとき}) \\ -b & (n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 5 \text{ のとき}) \\ a-b & (n \text{ を } 6 \text{ で割った余りが } 0 \text{ のとき}) \end{cases} \cdots \textcircled{5}$$

とわかる。

今、 d_n の作り方から、

$$1 \leq i \leq m \text{ で、} c_i = d_i \cdots \textcircled{6}$$

とならなければいけない。⑥のとき

$(c_1, c_2, \dots, c_m) = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ の条件でまだ問題なのは、

$$\begin{cases} i=m \text{ での、} d_m = d_{m-1} + d_1 \\ i=1 \text{ での、} d_1 = d_m + d_2 \end{cases} \cdots \textcircled{7} \text{ である。}$$

以上より、

⑦を満たすような $(c_1 =) a \neq 0$ が存在する $\cdots$ ☆
 m が求めるものである。⑤より、 m を 6 で割った余りで場合分けして調べると

$$\cdot \text{ 余り } 1 \text{ のとき：} \textcircled{7} \text{ は } \begin{cases} a = (a-b) + a \\ a = a+b \end{cases} \Rightarrow a=0$$

$$\cdot \text{ 余り } 2 \text{ のとき：} \textcircled{7} \text{ は } \begin{cases} b = a+a \\ a = b+b \end{cases} \Rightarrow a=0$$

$$\cdot \text{ 余り } 3 \text{ のとき：} \textcircled{7} \text{ は } \begin{cases} b-a = b+a \\ a = (b-a) + b \end{cases} \Rightarrow a=0$$

$$\cdot \text{ 余り } 4 \text{ のとき：} \textcircled{7} \text{ は } \begin{cases} -a = (b-a) + a \\ a = -a+b \end{cases} \Rightarrow a=0$$

$$\cdot \text{ 余り } 5 \text{ のとき：} \textcircled{7} \text{ は } \begin{cases} -b = -a+a \\ a = -b+b \end{cases} \Rightarrow a=0$$

$$\cdot \text{ 余り } 6 \text{ のとき：} \textcircled{7} \text{ は } \begin{cases} a-b = -b+a \\ a = (a-b) + b \end{cases} \Rightarrow a \text{ は任意}$$

であるから、「☆を満たす」 $\Leftrightarrow$ 「 m が 6 の倍数」。

以上より、題意を満たす m の必要十分条件は

$$\boxed{m \text{ が } 6 \text{ の倍数である}} \quad (\text{答}) \quad \text{こと。}$$

III

(1) $P(X \text{がちょうど } k) = P(X \text{が } k \text{以下}) - P(X \text{が } k-1 \text{以下})$

$$= \left[\left(\frac{k}{n} \right)^r - \left(\frac{k-1}{n} \right)^r \right] \quad (\text{答})$$

(これは $k=1$ でも成立。)

(2) (1)で $r=2$ として、

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 - \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 \right\} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n (2k^2 - k) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)\{(4n+2)-3\}}{6} \\ &= \left[\frac{(n+1)(4n-1)}{6n} \right] \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{E_n}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^r - \left(\frac{k-1}{n} \right)^r \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left[\left\{ 1 \left(\frac{1}{n} \right)^r - 1 \left(\frac{0}{n} \right)^r \right\} + \left\{ 2 \left(\frac{2}{n} \right)^r - 2 \left(\frac{1}{n} \right)^r \right\} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left\{ n \left(\frac{n}{n} \right)^r - n \left(\frac{n-1}{n} \right)^r \right\} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \left[n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^r \right] = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k-1}{n} \right)^r$$

である。上式で $n \rightarrow \infty$ とすると、(第二項は区分求積法から)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n} &= 1 - \int_0^1 x^r dx = 1 - \frac{1}{r+1} \\ &= \left[\frac{r}{r+1} \right] \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

IV

$|z|=1$ なる z は、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ なる θ を用いて、
 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とかける。
 このとき、

$$\begin{aligned} w &= \frac{(1+z)^2}{2} = \frac{\{(1+\cos \theta) + i \sin \theta\}^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} [\{(1+\cos \theta)^2 - \sin^2 \theta\} + \{2(1+\cos \theta)\}i] \\ &= (\cos^2 \theta + \cos \theta) + (\sin \theta + \sin \theta \cos \theta)i \cdots \textcircled{1} \text{ である。} \end{aligned}$$

- (1) ①より w の虚部は $\sin \theta + \sin \theta \cos \theta$ 。これを $f(\theta)$ とおくと、
 $f'(\theta) = \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1$
 $= (\cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1)$ 。

$f(\theta)$ は奇関数より、上式から $0 \leq \theta \leq \pi$ での増減を調べて下の表を得る。

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(\theta)$		+	0	-	0
$f(\theta)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

この表と、 $-\pi \leq \theta \leq 0$ のところ
 (奇関数より、折り返して-1倍)
 から、求める範囲は

$$\boxed{-\frac{3\sqrt{3}}{4} \leq \operatorname{Im} w \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}} \quad (\text{答})$$

- (2) $|z|=1$ 上の異なる z に対し w は異なる

$$\begin{aligned} \because \frac{(1+z)^2}{2} = \frac{(1+\tilde{z})^2}{2} &\Leftrightarrow 1+\tilde{z} = \pm(1+z) \\ &\Leftrightarrow \tilde{z} = z \quad \text{または} \quad \tilde{z} = -z-2 \\ &\text{であるが、後者のとき} \tilde{z} = z = -1 \text{ となるので結局} z = \tilde{z} \end{aligned}$$

から、「 θ が $-\pi \leq \theta \leq \pi$ を動くときの、①の道のり」が求める長さである。よって、長さを立式・計算すると

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left\{(\cos^2 \theta + \cos \theta)'\right\}^2 + \left\{(\sin \theta + \sin \theta \cos \theta)'\right\}^2} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(-\sin 2\theta - \sin \theta)^2 + (\cos \theta + \cos 2\theta)^2} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2(\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta)} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| 2 \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 2 \int_0^{\pi} \left| 2 \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \quad (\because \text{偶関数}) \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= \boxed{8} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

V

$$(1) \cdot t > 0 \text{ では、} \begin{cases} x = t + e^{t-1} \\ y = -t + e^{t-1} \end{cases} \therefore \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + e^{t-1} \\ -1 + e^{t-1} \end{pmatrix}$$

$$\cdot t < 0 \text{ では、} \begin{cases} x = t + e^{-t-1} \\ y = -t + e^{-t-1} \end{cases} \therefore \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t-1} \\ -1 - e^{-t-1} \end{pmatrix}$$

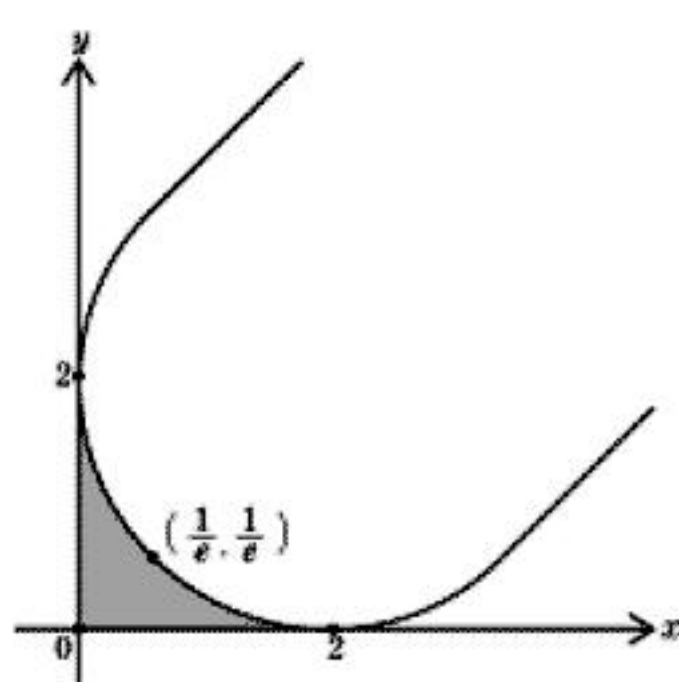
である。よって進行表は下図のようになる。

t		-1		0		1	
$\frac{dx}{dt}$	-	0	+	$\times$			+
$\frac{dy}{dt}$	-			$\times$	-	0	+
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\swarrow$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix} 1 \\ e \\ 1 \\ e \end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\nearrow$
		$\downarrow$				$\rightarrow$	

上の進行表から、座標軸と接する点は

x 軸と接するのが $\boxed{(2,0)}$ 、 y 軸と接するのが $\boxed{(0,2)}$ (答)

(2) 上の進行表から C の概形は下図のようになり、斜線部が回転する部分になる。



従って、 V を $\frac{1}{e} \leq x \leq 2$ の部分 V_1 と

$0 \leq x \leq \frac{1}{e}$ の部分 V_2 にわけると、

$$\cdot V_1 = \pi \int_{\frac{1}{e}}^2 y^2 dx = \pi \int_{-1}^0 (-t + e^{t-1})^2 (1 + e^{t-1}) dt$$

$$= \pi \int_0^1 (t^2 e^{t-1} - 2te^{2(t-1)} + e^{3(t-1)} + t^2 - 2te^{t-1} + e^{2(t-1)}) dt \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\cdot V_2 = \pi \int_0^{\frac{1}{e}} y^2 dx = \pi \int_{-1}^0 (-t + e^{-t-1})^2 (1 - e^{-t-1}) dt$$

[$s = -t$ で置換]

$$= \pi \int_{-1}^0 (s + e^{s-1})^2 (1 - e^{s-1}) (-ds)$$

$$= \pi \int_0^1 (s + e^{s-1})^2 (1 - e^{s-1}) ds$$

$$= \pi \int_0^1 (-s^2 e^{s-1} - 2se^{2(s-1)} - e^{3(s-1)} + s^2 + 2se^{s-1} + e^{2(s-1)}) ds \quad \dots \textcircled{2}$$

①+②より、

$$V = \pi \int_0^1 (-4te^{2(t-1)} + 2t^2 + 2e^{2(t-1)}) dt \quad \text{である。}$$

ここで部分積分により、

$$\int -4te^{2(t-1)} dt = -2te^{2(t-1)} + e^{2(t-1)} + (\text{定数}) \quad \text{であるから、}$$

$$V = \pi \left[-2te^{2(t-1)} + e^{2(t-1)} + \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1$$

$$= \boxed{2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{e^2} \right)} \quad (\text{答})$$

(3) $\cdot$ まず、 $\pi < 3.15$, $e < 2.72$ であるから

$$V < 2 \times 3.15 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2.72^2} \right) = 2.1 - \frac{6.3}{7.3984}$$

$$< 2.1 - \frac{6.3}{7.4} = 1.248\dots$$

$$\text{であるので、} V < \frac{5}{4} \dots \textcircled{3}$$

$\cdot$ また、 $\pi > 3.14$, $e > 2.71$ であるから

$$V > 2 \times 3.14 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2.71^2} \right) = \frac{6.28}{3} - \frac{6.28}{7.3441}$$

$$> \frac{6.28}{3} - \frac{6.28}{7.34} = 1.237\dots$$

$$\text{さらに } \frac{e^2}{6} < \frac{2.72^2}{6} = \frac{7.3984}{6} = 1.233\dots \text{なので}$$

$$V > \frac{e^2}{6} \dots \textcircled{4}$$

以上③、④より、題の3数を小さい順に並べると

$$\boxed{\frac{e^2}{6}, V, \frac{5}{4}} \quad (\text{答})$$