

数 学

(問 題)

2005年度 早稲田大学教育学部

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は4～5ページに記載されている。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. 受験番号および氏名は解答用紙の所定欄（2か所）に記入すること。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

1 次の にあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) a, b, c を正の定数とし, x, y が

$$axy - bx - cy = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$$

を満たすとき, $x + y$ の最小値は ア である。

(2) $\tan \theta_1 = 1, \tan \theta_2 = \frac{1}{2}, \tan \theta_3 = \frac{1}{3}, 0 < \theta_i < \frac{\pi}{2} (i = 1, 2, 3)$ とするとき,

$\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ の値は イ である。

(3) 実数 a, b を用いて $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2005} = a + bi$ とするとき, a の値は ウ であり, b の値は エ である。

(4) 初めは原点にある動点 P の t 秒後の座標 $(x(t), y(t))$ が

$$x(t) = e^t \cos t - 1, \quad y(t) = e^t \sin t$$

で与えられるとする。 P が 2 度目に x 軸の正の部分に到達するまでに P が動く道のりは オ である。

2 a は $0 < a < 1$ を満たす定数とする。直線 $y = a$ と曲線 $y = \left|\frac{x}{x+1}\right|$ によって囲まれる図形の面積 S を求めよ。

3 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は, $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおくとき,

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} A' = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad AA' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとする。

(1) 行列 A を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくとき, $x^2 + y^2 = s^2 + t^2$ であることを示せ。

(3) $f(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする。実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$

を満たしながら動くとき, $f(x, y)$ の最大値を求めよ。

4 a を 2 以上の自然数とする。長さ a の線分 AB を数直線上で移動させる次のようなゲームを考える。さいころを投げて出た目が 2 以下ならば正の方向 (右) へ 1 だけ, そうでなければ負の方向 (左) へ 1 だけ, 線分を移動させる。これを繰り返して, どちらかの端点が原点 O に到達したときゲームは終了する。

n を $0 < n < a$ を満たす自然数とする。線分の左端 A が初めは座標 $-n$ の位置にあり, A が原点 O に到達してゲームが終了する確率を p_n とする。また, $p_0 = 1$, $p_a = 0$ とする。

(1) p_n を p_{n-1} と p_{n+1} を用いて表せ。

(2) 確率 p_n を求めよ。

[以 下 余 白]