

数 学

(問 題)

(2005年度 早稲田大学社会科学部)

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は4～5ページに記載されている。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄に黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入すること。
4. 受験番号および氏名は、解答用紙の所定欄（2か所）に記入すること。
5. 計算の途中経過を記述すること。
6. コンパス、定規を使用してもよい。
7. 問題冊子は持ち帰ること。

この頁は下書きに使用してよい

この頁は下書きに使用してよい

1

x, y は、次の2つの不等式

$$y \geq x^2 - 4x + 5$$

$$y \leq -2x + 5$$

を満たす。次の問に答えよ。

- (1) 点 (x, y) の存在する領域を図示し、その領域の面積を求めよ。
- (2) $x+y$ のとりうる値の最大値と最小値、およびそのときの (x, y) を求めよ。
- (3) $\log_4 2^x + \log_{64} 2^y$ のとりうる値の最大値と最小値、およびそのときの (x, y) を求めよ。

2

次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を考える。

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = 5$$

$$x_{n+1} = x_n + y_n$$

$$y_{n+1} = 5x_n + y_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問に答えよ。

- (1) x_n および y_n をそれぞれ5で割ったときの余りを求めよ。
- (2) $a_n = x_n + cy_n$ とおいたとき、数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるように定数 c の値を定め、 a_n を n の式で表せ。
- (3) x_n および y_n を n の式で表せ。

3

自然数 n に対して、 n 以下の自然数で n との最大公約数が 1 であるような自然数の個数を $f(n)$ とする。

例えば、 $n = 12$ に対しては、このような自然数は、1, 5, 7, 11 の 4 個なので、 $f(12) = 4$ である。また、 $f(1) = 1$ 、素数 p に対しては $f(p) = p - 1$ である。

次の問に答えよ。

- (1) $f(77)$ の値を求めよ。
- (2) $f(pq) = 24$ となる 2 つの素数 p, q (ただし、 $p < q$ とする) の組を求めよ。
- (3) k, n を自然数とすると、 $f(2^k 3^n)$ の値を k と n の式で表せ。

[以 下 余 白]

この頁は下書きに使用してよい