

数 学

(問 題)

(2005年度 早稲田大学スポーツ科学部)

注 意 事 項

1. 問題冊子は，試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題は問題冊子の第4ページから第5ページに記載されている。
3. 解答はすべてマーク解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. 氏名のみをマーク解答用紙の所定欄に記入すること。
5. 問1から問3までの **ア**， **イ**， **ウ**， …にはそれぞれ， $-49, -48, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 48, 49$ のいずれかが当てはまる。次の例にならって，マーク解答用紙の**ア**， **イ**， **ウ**， …で示された欄にマークして答えること。
例. **ア**に3， **イ**に -5 ， **ウ**に30， **エ**に -24 ， **オ**に0と答えたいとき。

	—	十 の 位				一 の 位									
		1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
イ	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐
ウ	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
エ	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. マークははっきり記入すること。また，訂正する場合は，消しゴムでていねいに，消し残しがないようによく消すこと。

マークする時	☒ 良い	☐ 悪い	☐ 悪い
マークを消す時	☐ 良い	☐ 悪い	☐ 悪い

7. 問題冊子は持ち帰ること。

問 1. 次の各問いに答えよ.

(a) 方程式

$$27 \cdot 27^x - 27^{\frac{2}{3}x} - 729 \cdot 27^{\frac{1}{3}x} + 27 = 0$$

の実数解すべての積は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{2}$ である.

(b) 関数

$$y = (\log_2 x)^3 - \log_2 x^3 \quad (0 < x \leq 2)$$

の最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である.

(c) $\sqrt{6}$ は有理数ではないことを証明する. 空欄を満たすことにより, 証明を完成させよ.

$\sqrt{6}$ が有理数であれば,

$$\sqrt{6} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は最大公約数が } 1 \text{ である正の整数})$$

で表わされる. 両辺をそれぞれ 2 乗すれば, $6 = \frac{q^2}{p^2}$. よって

$$6p^2 = q^2 \tag{1}$$

すなわち, q^2 は $\boxed{\text{ウ}}$ の倍数である. ここで

$$q = \boxed{\text{ウ}} s + t$$

とおく. ただし, s は非負整数, t は $\boxed{\text{ウ}}$ 未満の非負整数である. このとき, $q^2 = \boxed{\text{エ}} s^2 + \boxed{\text{オ}} st + t^2$.
したがって, q^2 が $\boxed{\text{ウ}}$ の倍数であるためには, $0 \leq t < \boxed{\text{ウ}}$ なので, $t = \boxed{\text{カ}}$ でなければならない.
このことから

$$q = \boxed{\text{キ}} s \tag{2}$$

となり, (2) を (1) に代入すれば $p^2 = \boxed{\text{ウ}} s^2$. すると, 上と同様にして p は $\boxed{\text{ウ}}$ の倍数となる. これは p, q の条件に矛盾するため, $\sqrt{6}$ は有理数でない.

(d) 座標平面上の原点 $O = (0, 0)$ と 2 点 A, B

$$A = (2 \cos \theta + \sin \theta, \sin \theta),$$

$$B = (\sin \theta, 2 \cos \theta + \sin \theta),$$

を頂点とする三角形 OAB の面積を S_θ とおく ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$). このとき, S_θ は $\theta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{2}^\circ$ で最大値

$\boxed{\text{ケ}} + \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ をとる.

問 2. 次の問いに答えよ.

(a) x に関する次数が 2006 の多項式 $Q(x)$ に対して, 次の条件

$$Q(0) = -1, Q(1) = Q(2) = Q(3) = \cdots = Q(2006) = 0$$

が成立しているとき, $Q(2007) = \boxed{\text{サ}}$ である.

(b) x に関する次数が 2005 の多項式 $P(x)$ に対して, 次の条件

$$P(k) = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2006$$

が成立しているとき, $P(2007) = \boxed{\text{シ}}$ である.

問 3. 直交する 2 直線 l, m の方程式が

$$l: y = ax - b, \quad m: y = cx - d \quad (b > 0, d > 0)$$

で与えられ, 放物線 C の方程式が

$$C: y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

で与えられている. C は点 $(-2, 0)$ で l と, 点 $(1, 0)$ で m とそれぞれ接する. このとき, 次の問いに答えよ. ただし, 分数は既約分数で答えること.

(a) $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ を求めれば, $a = \boxed{\text{ス}}, b = \boxed{\text{セ}}, c = \boxed{\text{ソ}}, d = \boxed{\text{タ}}, \alpha = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}, \beta = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}},$

$\gamma = -\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である.

(b) 放物線 C と 2 直線 l, m で囲まれる領域の面積を S とすると, $S = \frac{\boxed{\text{又}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である.

[以 下 余 白]