

数 学

問 題

2005年度 早稲田大学理工学部

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。
4. すべての解答用紙の所定欄（各2か所）に受験番号および氏名を記入してください。
5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に、黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入してください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 問題冊子は持ち帰ってください。
8. 解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

I. 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ を頂点とする四面体を考える。ただし, $a, b, c > 0$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の内接円の中心の座標を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の各面に接する球の中心の座標を求めよ。

II. 円周上に m 個の点 $P_1, P_2, \dots, P_m$ がこの順に配置され, 各点 P_i に一つの実数 c_i が与えられている ($i = 1, 2, \dots, m$)。ただし $m \geq 3$ とする。さらに, $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ は条件

(*) 各点の値は, 隣接する 2 点の値の和に等しい

を満たす。このとき, 以下の問に答えよ。

- (1) $m = 3$ の場合に (c_1, c_2, c_3) の値を求めよ。
- (2) $c_1 = a, c_2 = b$ とおくとき c_7 を a, b で表せ。ただし $m \geq 7$ とする。
- (3) 条件 (*) を満たし, かつ $c_1 \neq 0$ となる $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ が存在するのは m がどのような自然数の場合か。 m が満たすべき必要十分条件を求め, その理由を簡単に述べよ。

III. 袋の中に 1 から n までの番号のついた n 個の玉が入っている。この袋から玉を 1 個取り出し, 番号を調べてもとに戻すことを r 回行うとき, 取り出された玉の番号の最大値を X とする。以下の問に答えよ。

- (1) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して, X がちょうど k となる確率を求めよ。
- (2) $r = 2$ のとき, X の期待値を求めよ。
- (3) 一般の r に対して X の期待値を E_n とおくとき, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n}$$

を求めよ。

- IV. 複素数 z が $|z| = 1$ を満たしながら動くとき、次の式で定まる w について以下の問に答えよ。

$$w = \frac{(1+z)^2}{2}$$

- (1) w の虚部のとる値の範囲を求めよ。
- (2) w が複素数平面上に描く曲線の長さを求めよ。(複素数平面上の長さは座標平面上の長さと同じとする。)

- V. 媒介変数 t により

$$\begin{cases} x = t + e^{(|t|-1)} \\ y = -t + e^{(|t|-1)} \end{cases}$$

と表される xy 平面上の曲線 C について、以下の問に答えよ。

- (1) 曲線 C と座標軸が接する点の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C と x 軸, y 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。
- (3) (2) で求めた体積を V とするとき, $V, \frac{e^2}{6}, \frac{5}{4}$ を小さい順に並べよ。
ただし, $3.14 < \pi < 3.15$ および $2.71 < e < 2.72$ は既知とする。

[以 下 余 白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。