

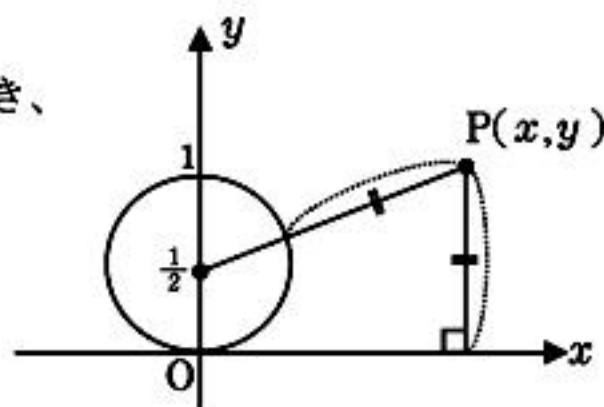
問1

x 軸と円 $\ell: x^2 + y^2 - y = 0$ から等距離にある点 $P(x, y)$ を考える。

右図のように点 P が円の外部、 $y > 0$ のとき、

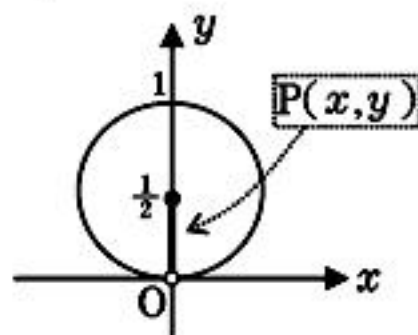
$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} = y$$

から $y = \frac{1}{2}x^2$ ($x \neq 0$) が成立する。

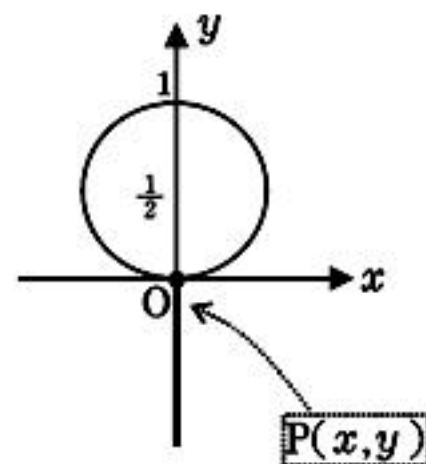


また点 P が円の内部、 $y > 0$ のとき、

条件を満たすのは線分 $x = 0$ ($0 < y \leq \frac{1}{2}$) である。



さらに点 P が $y \leq 0$ の範囲にあるとき、
条件を満たすのは半直線 $x = 0$ ($y \leq 0$) である。



円周上の点は原点を除き、明らかに条件を満たさないことも考慮すると、求める点 P の軌跡は、

ア: $y = \frac{1}{2}x^2$ … 曲線 m

イ: $x = 0$ ただし、 $y \leq \frac{1}{2}$ … 半直線 m'

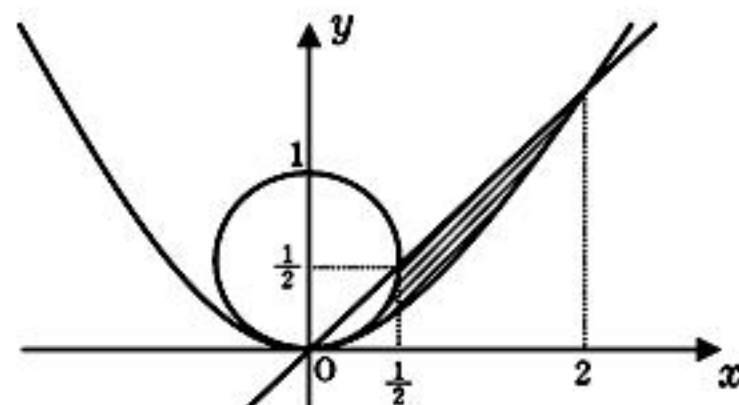
となる。 … 答

以上より求める面積は右図から、

$$\int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx - \left\{ \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 - \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \right)$$

$$= \frac{19}{24} - \frac{\pi}{16} \quad \dots \text{ウ} \quad \dots \text{答}$$



問 2

- (ii) $i=1,2,3,4$ のとき、 (x_{2i-1}, x_{2i}) は偶数と奇数のペアである。
- (iii) (x_{2i-1}, x_{2i}) について、大きいほうの数字の偶奇と x_{2i+1} の偶奇は一致する。
- と解釈できる。

- (1) $P:\langle 1, 2, 4, 3, 6, x_6, x_7, x_8 \rangle$ について、残っている数字は 5, 7, 8 であり、
 x_6 は奇数であることを考慮し、(iii) に注意すると下のような樹形図が書ける。

偶数	奇数		
x_5	x_6	x_7	x_8
6	5	8	7
	7	5	8

よって、 $\langle x_6, x_7, x_8 \rangle = \langle 5, 8, 7 \rangle, \langle 7, 5, 8 \rangle$ …答

- (2) $P:\langle 1, 4, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 8 \rangle$ について、残っている数字は 2, 3, 5, 6, 7 であり、
 x_3 は偶数、 x_7 は奇数、さらに x_5, x_6 のうち大きいほうは奇数であること等を考慮して、

偶数	奇数	大きいほうは奇数	奇数	
x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
2	3	5	6 ×	5
		7	6	
		3	6 ×	
		7	6	
6	5	3	6 ×	3
		5	6 ×	
		2	5	
		7	3	
6	7	2	5	7
		3	2	
		5	2	
		7	2	

以上、8 通り …答

- (3) $P:\langle 1, 6, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \rangle$ について、残っている数字は 2, 3, 4, 5, 7, 8 であり、 x_3 は偶数なので x_4 は奇数である。そこで (x_3, x_4) の組を考えると、
 x_3 は 2, 4, 8 のどれか、 x_4 は 3, 5, 7 のどれか
なので 9 通りの組が考えられる。

次に、具体的に $(x_3, x_4) = (2, 3)$ のときを考えると (x_5, x_6) の組は
 $(x_5, x_6) = (5, 4), (5, 8), (7, 4), (7, 8)$

の 4 通りに決まり、これは他のパターンでも同様に 4 通りずつある。

以上より $9 \times 4 = 36$ (通り) …答

問3

(1) $m \geq 2$ のとき、

$${}_m C_2 = \frac{m(m-1)}{2}$$

の形から、これが m で割り切れるには、 $\frac{m-1}{2}$ が 1 以上の整数であることが必要。

つまり、 q を $q \geq 1$ を満たす整数として

$$\frac{m-1}{2} = q \Leftrightarrow m = 2q + 1$$

の形で書けることである。逆にこのとき、

$${}_m C_2 = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{(2q+1)2q}{2} = q(2q+1)$$

は整数であるので十分でもある。

以上より『 m が 3 以上の奇数であること』 …答

(2) p は 2 以上の素数、 $1 \leq k < p$ のとき、

${}_p C_k$ は正の整数であることから

$${}_p C_k = l \quad (l \text{ は自然数})$$

と書ける。変形して、

$$\frac{p!}{k!(p-k)!} = l \Leftrightarrow p! = l \cdot k! \cdot (p-k)!$$

となるが、左辺が素因数 p を含むので右辺も含むが、

$k!$, $(p-k)!$ は $k < p$, $p-k < p$ であること、そして p が素数であることから素因数 p を含まないので p は l に含まれる。つまり、 l は p で割り切れることとなり、 ${}_p C_k$ は p で割り切れる。 …証明終り

(3) p は 2 以上の素数のとき、

$$\begin{aligned} & (n+1)^p - n^p - 1 \\ &= ({}_p C_0 n^p + {}_p C_1 n^{p-1} + {}_p C_2 n^{p-2} \cdots + {}_p C_{p-2} n^2 + {}_p C_{p-1} n + {}_p C_p) - n^p - 1 \quad (\text{二項展開}) \\ &= \underline{{}_p C_1 n^{p-1} + {}_p C_2 n^{p-2} + \cdots + {}_p C_{p-2} n^2 + {}_p C_{p-1} n} \end{aligned}$$

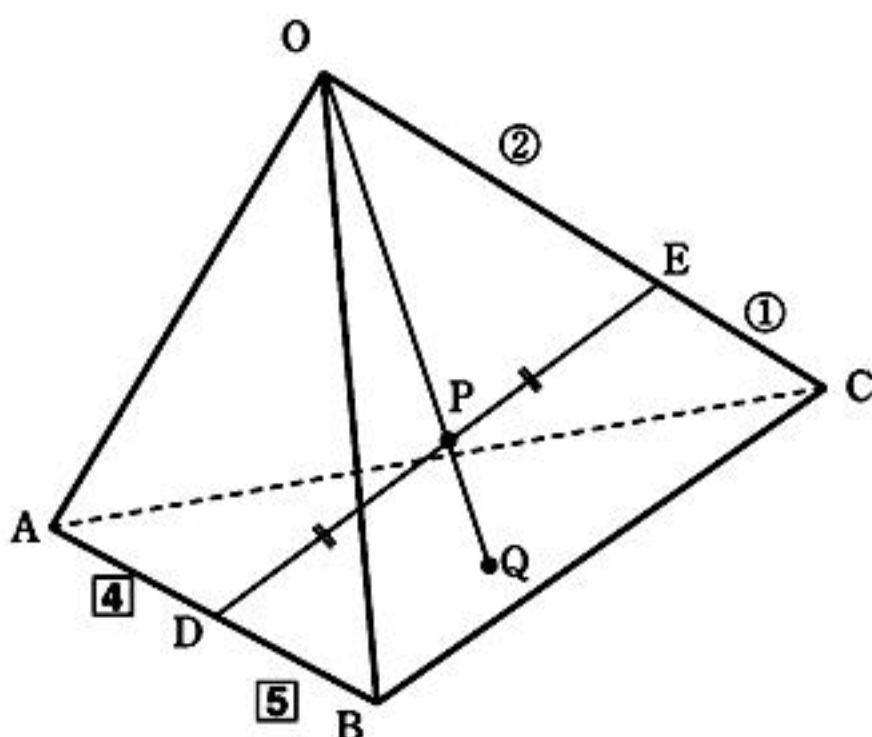
から、各係数 ${}_p C_i$ ($i=1, 2, \dots, p-1$) は (2) の結果より p の倍数であるので与式は任意の自然数 n に対し、 p で割り切れる。

…証明終り

問 4

(1) 右図において、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}}{4+5} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{5\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} + 6\overrightarrow{c}}{18} \quad \dots \text{答}\end{aligned}$$



また O, P, Q は同一直線上にあるので、 k を定数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= k\overrightarrow{OP} \\ &= \frac{5}{18}k\overrightarrow{a} + \frac{2}{9}k\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}k\overrightarrow{c}\end{aligned}$$

と書ける。さらに Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあるので、

$$\begin{aligned}\frac{5}{18}k + \frac{2}{9}k + \frac{1}{3}k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

が成立。このとき $\overrightarrow{OQ} = \frac{6}{5}\overrightarrow{OP}$ から、 $|\overrightarrow{OP}| : |\overrightarrow{OQ}| = 5 : 6$ …答

(2) CQ を延長し、線分 AB との交点を R とする。

(1)の結果より $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{4}{15}\overrightarrow{b} + \frac{2}{5}\overrightarrow{c}$ であり、3 点 C, Q, R は同一直線上にあるので

$\overrightarrow{CR} = t\overrightarrow{CQ}$ を満たす実数 t が存在し、

さらに R は直線 AB 上にあることから、

$$\overrightarrow{CR} = s\overrightarrow{CA} + (1-s)\overrightarrow{CB}$$

を満たす実数 s が存在する。よって

$$\overrightarrow{CR} = t\overrightarrow{CQ}$$

$$\Leftrightarrow s\overrightarrow{CA} + (1-s)\overrightarrow{CB} = t(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC})$$

$$\Leftrightarrow s\overrightarrow{a} + (1-s)\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = \frac{1}{3}t\overrightarrow{a} + \frac{4}{15}t\overrightarrow{b} - \frac{3}{5}t\overrightarrow{c}$$

について $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ は一次独立なので、 $\overrightarrow{c}$ の係数から

$$1 = \frac{3}{5}t$$

より $t = \frac{5}{3}$ となる。よって $\overrightarrow{CR} = \frac{5}{3}\overrightarrow{CQ}$ となり、 $CR : CQ = 5 : 3$ である。

$\triangle ABQ$ と $\triangle ABC$ は AB を共通の底辺とみることでその面積比は

$$RQ : RC = 2 : 5$$

…答

