

1

ア	イ	ウ	エ
168	$20e^{-2} - 52e^{-4}$	$\frac{7}{27}$	54

(1) (x, y) を原点中心に反時計回りに 45 度回転させた座標を (X, Y) とおくと、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より、 $X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$, $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$ がわかる。 $x^2 - y^2 = 2$ とこの式から x, y を消去して、 $XY = 1$ を得る。

(2) 直線 $x = \sqrt{2}a$ を、原点を中心に 45 度回転させた直線は $X + Y = 2a$ で与えられる。よって、45 度回転させた後の様子は図 のようになる。 $XY = 1$ と $X + Y = 2a$ の交点の X 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(2a - X - \frac{1}{X} \right) dX \\ &= \left[2aX - \frac{1}{2}X^2 - \log X \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= (\beta - \alpha) \left\{ 2a - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right\} - \log \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

である。ここで、 α, β は方程式 $X^2 - 2aX + 1 = 0$ の解なので、 $\alpha = a - \sqrt{a^2 - 1}$, $\beta = a + \sqrt{a^2 - 1}$ であるから、

$$S = 2a\sqrt{a^2 - 1} - 2\log(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

である。

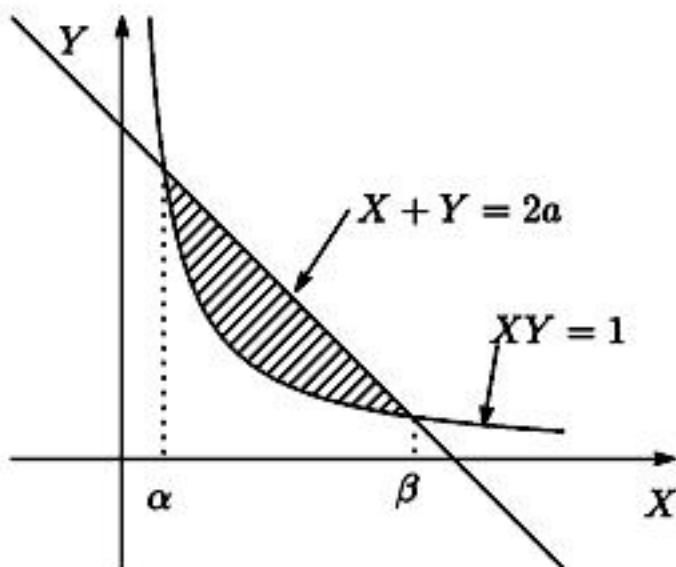


図1 問題2の図

(1) 各ベクトルを成分表示して

$$\vec{a} = (r_1 \cos \alpha, r_1 \sin \alpha), \vec{b} = (r_2 \cos \beta, r_2 \sin \beta), \vec{c} = (r_3 \cos \gamma, r_3 \sin \gamma)$$

とおく。 $\vec{b} + \vec{c} = (R \cos \theta, R \sin \theta)$ とおくことにすると、 $R \cos \theta = r_2 \cos \beta + r_3 \cos \gamma$ と $R \sin \theta = r_2 \sin \beta + r_3 \sin \gamma$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] &= r_1 R \sin(\theta - \alpha) \\ &= r_1 R (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \\ &= r_1 \{ (r_2 \sin \beta + r_3 \sin \gamma) \cos \alpha - (r_2 \cos \beta + r_3 \cos \gamma) \sin \alpha \} \\ &= r_1 r_2 (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) + r_1 r_3 (\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha) \\ &= r_1 r_2 \sin(\beta - \alpha) + r_1 r_3 \sin(\gamma - \alpha) \\ &= [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}] \end{aligned}$$

より題意が成り立つ。(2)(1) と、 $[\vec{a}, k\vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}]$ を用いると、

$$\begin{aligned} r_n &= [\vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}] \\ &= 2[\vec{a}_n, \vec{a}_n] - \frac{\sqrt{3}}{2} [\vec{a}_n, \vec{a}_{n-1}] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} r_{n-1} \end{aligned}$$

となり、 $\{r_n\}$ は等比数列である。一方、

$$\vec{a}_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right), \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right), \vec{a}_2 = \left(\cos \frac{\pi}{6} + \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right), \sin \frac{\pi}{6} + \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

であるので、(1) より、

$$r_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

となる。よって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$$

である。

(1) $\log f(x)$ を計算すると、

$$\log f(x) = \frac{1}{x} \log(1 + a^x)$$

である。 $x > 0$ の範囲で、 $\frac{1}{x}$ は減少関数であり、 $0 < a < 1$ なので、 a^x は減少関数となり、 $\log(1 + a^x)$ も減少関数である。よって、 $\log f(x)$ は単調減少関数であるので、 $f(x)$ もそうである。(2) 4つの数すべてから 2006 をくくり出す。

$$\begin{aligned} (2005^{17} + 2006^{17})^{\frac{1}{17}} &= 2006 \left(1 + \left(\frac{2005}{2006} \right)^{17} \right)^{\frac{1}{17}} \\ (2005^{18} + 2006^{18})^{\frac{1}{18}} &= 2006 \left(1 + \left(\frac{2005}{2006} \right)^{18} \right)^{\frac{1}{18}} \\ (2005^{\frac{1}{17}} + 2006^{\frac{1}{17}})^{17} &= 2006 \left(1 + \left(\frac{2005}{2006} \right)^{\frac{1}{17}} \right)^{17} \\ (2005^{\frac{1}{18}} + 2006^{\frac{1}{18}})^{18} &= 2006 \left(1 + \left(\frac{2005}{2006} \right)^{\frac{1}{18}} \right)^{18} \end{aligned}$$

であり、 $\frac{2005}{2006} < 1$ であるから、これらは、(1) で $a = \frac{2005}{2006}$ としたときの $2006f(17)$ 、 $2006f(18)$ 、 $2006f(1/17)$ 、 $2006f(1/18)$ の値であり、 f は単調減少なので、一番小さいのは $2006f(18) = (2005^{18} + 2006^{18})^{\frac{1}{18}}$ である。

(3) 一般性を失うことなく、 $p_1, p_2, \dots, p_n$ の中で最大のものは p_1 であるとしてよい。今、

$$f(x) = (p_1^x + p_2^x + \dots + p_n^x)^{\frac{1}{x}}$$

とおく。この式の右辺から p_1 をくくり出すと、

$$f(x) = p_1 \left(1 + \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^x + \dots + \left(\frac{p_n}{p_1} \right)^x \right)^{\frac{1}{x}}$$

を得る。両辺の対数を取ると、

$$\log f(x) = \log p_1 + \frac{1}{x} \log \left(1 + \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^x + \dots + \left(\frac{p_n}{p_1} \right)^x \right)$$

である。ここで、先の仮定により、 $k = 2, \dots, n$ ならば、 $0 < \frac{p_k}{p_1} < 1$ であるから、 $\left(\frac{p_k}{p_1} \right)^x$ は単調減少関数である。よって、 $\log \left(1 + \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^x + \dots + \left(\frac{p_n}{p_1} \right)^x \right)$ も単調減少もしくは一定で

あり、さらに、 $\frac{1}{x}$ も単調減少だから、 $\log f(x)$ は単調減少関数である。以上から、

$$(p_1^\alpha + p_2^\alpha + \dots + p_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (p_1^\beta + p_2^\beta + \dots + p_n^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

である。