

1.

(1) ア : 4

イ : 6

(2) ウ : 2

エ : 3

(3) オカキ : 665

(4) ク : 1

ケ : 2

2.

- (1) $\{x^2\}' = 2x$ より、それぞれの接線の式は

$$\begin{aligned} y &= 2ax - a^2 \\ y &= 2bx - b^2 \end{aligned} \quad \text{である。連立して解いて}$$

$$P\left(\frac{a+b}{2}, ab\right) \cdots (\text{答})$$

- (2) まず、

$$T = \int_a^b -(x-a)(x-b)dx = \frac{(b-a)^3}{6}$$

である。また、(1)より、

$$a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \text{ では } A \text{ での接線と}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq x \leq b \text{ では } B \text{ での接線と}$$

C が囲む部分であるから、

$$S = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{12}$$

以上より、 $\frac{S}{T} = \frac{1}{2} \cdots (\text{答})$

- (3) (2)より、 $S = \frac{9}{4} \Leftrightarrow (b-a)^3 = 27 \Leftrightarrow b = a+3$

で、 P の x を x 、 P の y を y と単に書くと、(1)より、

$$\begin{cases} x = \frac{a+a+3}{2} = a + \frac{3}{2} \\ y = a(a+3) \end{cases} \quad a = x - \frac{3}{2} \text{ を}$$

下式に代入して、 P の軌跡は、

$$y = \left(\left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{3}{2} \right) \right) = x^2 - \frac{9}{4} \text{ なる放物線 } \cdots (\text{答})$$

(x の範囲に特に制限はないので、放物線全体となる。)

3.

(1) $f(4)=f(2)=f(1)=1 \cdots$ (答)

$$f(13)=f(6)+1=f(3)+1=f(1)+1+1=3 \cdots$$
(答)

$$f(2^{10}+1)=f(2^9)+1=f(2^8)+1=\cdots=f(1)+1=2 \cdots$$
(答)

(2) 一般に、自然数 N を

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2 + a_0 \quad (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \text{ は } 0 \text{ or } 1)$$

の形に書くことが出来る。このとき、

$$N = [a_n a_{n-1} \cdots a_0] \text{ とかくことにする。 (2進法表示)}$$

以下のことを示す。

「性質」: $N = [a_n a_{n-1} \cdots a_0]$ のとき、

$$f(N) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$$

(証明) $f(N) = f(a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_0)$

$$= \begin{cases} f(a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \cdots + a_1) + 1 & (a_0 = 1 \text{ のとき}) \\ f(a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \cdots + a_1) & (a_0 = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$= f([a_n a_{n-1} \cdots a_1]) + a_0$$

となっている。あとはこれを繰り返すことで、

2進法表示したときの各桁の和が出る事がわかる。 //

今、 $2006 = [11111010110]$ であるから、2006 以下の自然数では、2進法表示での各桁の中の1の個数の最大値は10である。(2006が11桁であり、全部が1だと2006を超えるので。)「性質」より、これはそのまま f の値なので

求める最大値 M は $M = 10 \cdots$ (答)

(3) $2006 = [11111010110]$ 以下で2進法表示での各桁の中の1の個数が10なのは、

$$\bullet [1111111111] = 1023$$

$$\bullet [1011111111] = 1535$$

$$\bullet [1101111111] = 1791$$

$$\bullet [1110111111] = 1919$$

$$\bullet [1111011111] = 1983$$

の5つである。 $\cdots$ (答)