

[1] $n=0,1,2,\dots$ のとき

$$f_0(x) = e^x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt \quad \cdots \textcircled{2} \quad \text{について、}$$

$$(1) \quad n \geq 1 \text{ で } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x) \quad \cdots \textcircled{3}$$

であることを数学的帰納法により証明する。

(i) $n=1$ のとき、③は

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + f_1(x) \Leftrightarrow f_1(x) = e^x - 1 \quad \text{であるが、}$$

①, ②から

$$f_1(x) = \int_0^x f_0(t) dt = \int_0^x e^t dt = [e^t]_0^x = e^x - 1$$

なので③は $n=1$ のとき成立。

(ii) $n=k(k \geq 1)$ のとき、③は成立すると仮定する。つまり、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + f_k(x)$$

であり、②で $n=k$ とすることで、

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \int_0^x f_k(t) dt \\ &= \int_0^x \left(e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - \cdots - \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) dt \\ &= \left[e^t - t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} - \cdots - \frac{t^k}{k!} \right]_0^x \\ &= e^x - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{x^k}{k!} - e^0 \end{aligned}$$

$$\text{から、} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^k}{k!} + f_{k+1}(x)$$

が成立、つまり③は $n=k+1$ でも成立する。

以上より題意は証明された。

…証明終了

$$(2) \quad n \geq 1, \quad x \geq 0 \text{ で } 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!} e^x \quad \cdots \textcircled{4}$$

であることを証明する。

(i) $n=1$ のとき、④は

$$0 \leq f_1(x) \leq x e^x \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq x e^x + 1$$

であるが、左側の不等式は $x \geq 0$ で常に成立し、右側に関しても

$g(x) = x e^x + 1 - e^x$ について $g'(x) = x e^x \geq 0 (x \geq 0)$ であり、

$g(0) = 0$ とで $g(x) \geq 0 (x \geq 0)$ なので成立する。

(ii) $n=k(k \geq 1)$ のとき、④は成立すると仮定する。つまり、

$$0 \leq f_k(x) \leq \frac{x^k}{k!} e^x$$

と仮定し、これを区間 $[0, x]$ で積分すると、 $0 \leq x$ において

$$0 \leq \int_0^x f_k(t) dt \leq \int_0^x \frac{t^k}{k!} e^t dt$$

が成立し、中辺は $f_{k+1}(x)$ であり、最右辺について

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \int_0^x t^k e^t dt &= \frac{1}{k!} \left[\left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} e^t \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{k+1} t^{k+1} e^t dt \right] \\ &= \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} e^x - \frac{1}{(k+1)!} \int_0^x t^{k+1} e^t dt \\ &\leq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} e^x \end{aligned}$$

が成立することから④は $n=k+1$ でも成立する。

以上より④は数学的帰納法により証明された。

…証明終了

(3) (2)で $x=1$ として、

$$0 \leq f_n(1) \leq \frac{e^1}{n!}$$

が成立し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n!} = 0$ からはさみうちの原理により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$$

…答

[II] $P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n+12)x - 8$ ($n=1, 2, \dots$) について、

(1) $P_n'(x) = 3x^2 - 2nx - (2n+12)$ から、

$P_n'(x) = 0$ の判別式 < 0 より 3 次関数 $y = P_n(x)$ は極値をもち、
その極値をとる x の値をそれぞれ β, α ($\beta < x < \alpha$) とおくと

$$\alpha\beta = -(2n+12) < 0$$

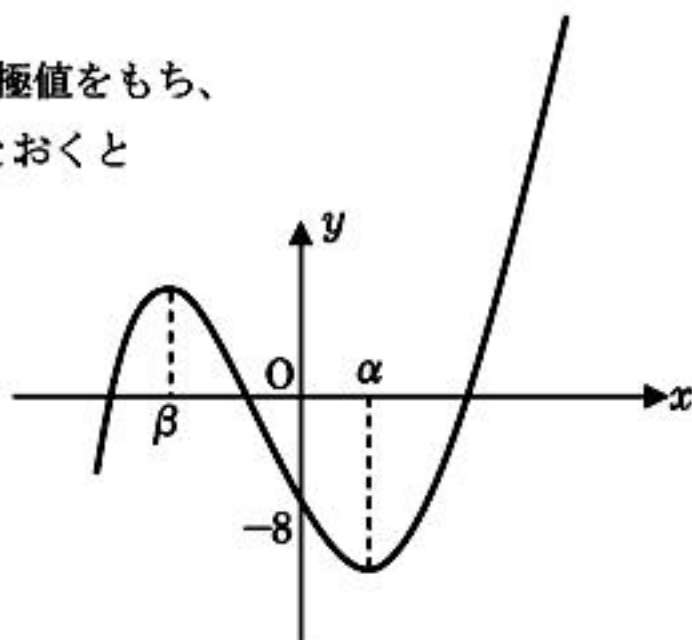
であり、さらに $P_n(0) = -8 < 0$, $P_n(-2) = 8 > 0$

そして $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_n(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x) = +\infty$ とで

$y = P_n(x)$ のグラフの概形は右のようになる。

よって 3 次方程式 $P_n(x) = 0$ の正の実数解は

ただ 1 つである。 …証明終り



(2) 条件から、

$$P_n(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - nt^2 - (2n+12)t - 8 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立。このとき、

$$\begin{aligned} P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right) &= \left(-\frac{4}{t+2}\right)^3 - n\left(-\frac{4}{t+2}\right)^2 - (2n+12)\left(-\frac{4}{t+2}\right) - 8 \\ &= \frac{-64 - n \times 16(t+2) + 4(2n+12)(t+2)^2 - 8(t+2)^3}{(t+2)^3} \\ &= \frac{-8}{(t+2)^3} \{t^3 - nt^2 - (2n+12)t - 8\} \\ &= 0 \quad (\because \textcircled{1} \text{より}) \end{aligned}$$

…答

(3) (2)の結果より $x = -\frac{4}{t+2}$ も $P_n(x) = 0$ の解である。さらに $t > 0$ なので

$-\frac{4}{t+2} < 0$ からこれは負の解であるが、 $-\frac{4}{t+2} > -2$ なので最小の解ではない。

そこで、 $P_n(x) = 0$ で解と係数の関係と問題の設定から、

$$\left\{ \beta_n + \left(-\frac{4}{\alpha_n + 2}\right) + \alpha_n = n \quad \dots \textcircled{2} \right.$$

$$\left. \beta_n \left(-\frac{4}{\alpha_n + 2}\right) \alpha_n = 8 \quad \dots \textcircled{3} \right.$$

が成立し、③から

$$\beta_n = -2 - \frac{4}{\alpha_n} \quad \dots \text{答}$$

また、②から $\alpha_n = n + 2 + \frac{4}{\alpha_n} + \frac{4}{\alpha_n + 2} > n$ が成立し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \quad \text{より、} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\alpha_n} = 0$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = -2$ …答

[Ⅲ] a_0, a_1 は自然数、

$$a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n| \quad (n \geq 0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b_n = \begin{cases} a_{2n} & (a_{2n} \geq a_{2n+1}) \\ a_{2n+1} & (a_{2n} < a_{2n+1}) \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

について、

(1) $a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ がすべて正のとき、

$$a_{2n} = m, \quad a_{2n+1} = n \quad (m, n \text{ は自然数}) \text{ とおくと}$$

$$m = n \text{ ではない。} (\because a_{2n} = a_{2n+1} \text{ のとき、} \textcircled{1} \text{ から } a_{2n+2} = 0 \text{ となる})$$

(i) $m > n$ のとき、

$$(a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}) = (m, n, m-n) \quad a_{2n+3} = \begin{cases} n-(m-n) \\ (m-n)-n \end{cases} \text{ のどちらか}$$

であり、 $b_n = m$ となる。

$$\text{また、} m - \{n - (m - n)\} = 2(m - n) > 0$$

$$m - \{(m - n) - n\} = 2n > 0$$

なので a_{2n+3} がいずれの値であっても $b_n > b_{n+1}$ が成立する。

(ii) $n > m$ のとき、

$$(a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}) = (m, n, n-m) \quad a_{2n+3} = \begin{cases} n-(n-m) \\ (n-m)-n \end{cases} \text{ のどちらか}$$

であり、 $b_n = n$ となる。

$$\text{また、} n - \{n - (n - m)\} = n - m > 0$$

$$n - \{(n - m) - n\} = n + m > 0$$

なので a_{2n+3} がいずれの値であっても $b_n > b_{n+1}$ が成立する。

以上より $a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ がすべて正のとき、常に $b_n > b_{n+1}$ が成り立つ。 …証明終了

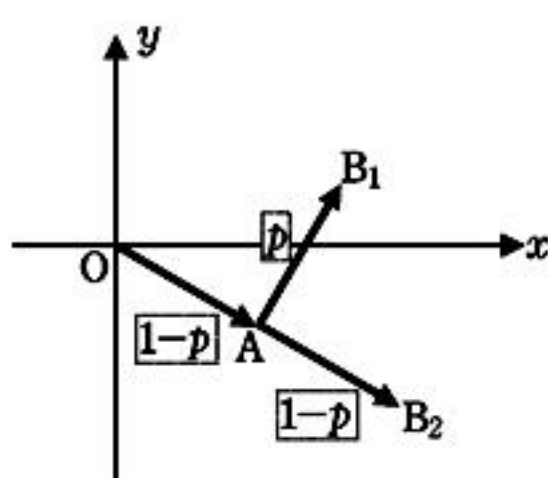
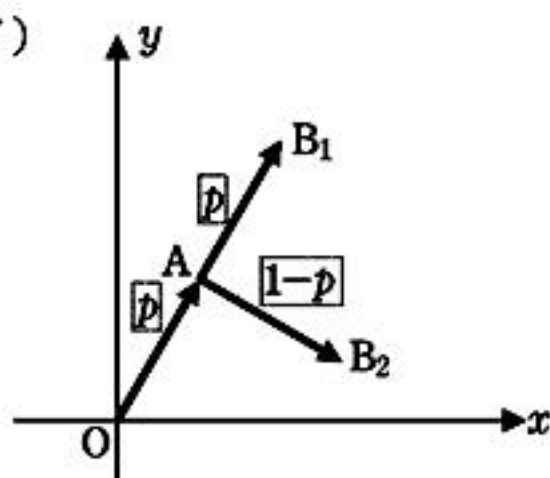
(2) 設定により常に $a_n \geq 0$ であり、さらに b_n はその計算から常に $b_n \geq 0$ を満たす。

また(1)の結果より、 $a_k (k \geq 1)$ がすべてが正の数であれば常に $b_n > b_{n+1} (n \geq 1)$ が成立する。

今、 $a_n = 0$ を満たす n が存在しないとすると、 a_n は常に正となるので上記のように数列 $\{b_n\}$ は常に減少していく。しかし $b_n \geq 0$ なので非負の整数は無限に降下できないことから矛盾が起こる。よって $a_n = 0$ を満たす n は必ず存在する。 …証明終了

[IV] 問題の条件を満たすような図をかいてみる。

(イ)



図の点の座標はそれぞれ

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B_1(1, \sqrt{3})$$

$$, B_2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), B_1\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$, B_2(\sqrt{3}, -1)$$

である。

(1) 上の図と、そして OB の距離を考えることで、

左の図において

$O \rightarrow A \rightarrow B_1$ のとき、 $OB^2=4$ であり、確率は p^2

$O \rightarrow A \rightarrow B_2$ のとき、 $OB^2=\sqrt{2}$ であり、確率は $p(1-p)$

右の図において

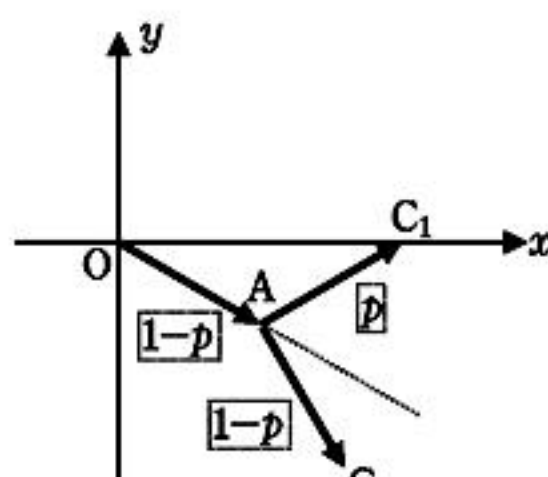
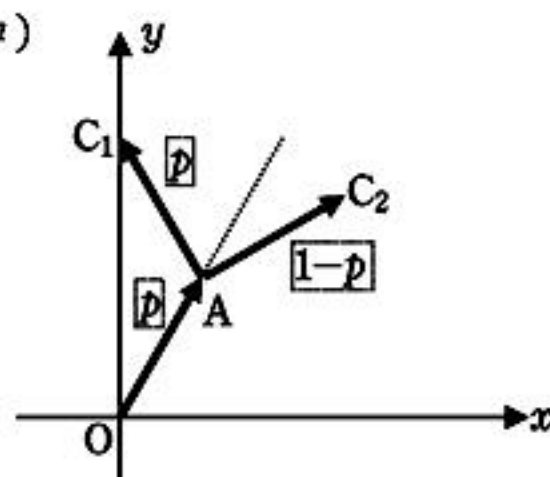
$O \rightarrow A \rightarrow B_1$ のとき、 $OB^2=\sqrt{2}$ であり、確率は $(1-p)p$

$O \rightarrow A \rightarrow B_2$ のとき、 $OB^2=4$ であり、確率は $(1-p)^2$

以上から線分 OB の長さの 2 乗の期待値 $f(p)$ の値は、

$$\begin{aligned} f(p) &= 4p^2 + \sqrt{2}p(1-p) + \sqrt{2}(1-p)p + 4(1-p)^2 \\ &= 4(p^2 - p + 1) \end{aligned} \quad \dots \text{答}$$

(ロ)



図の点の座標はそれぞれ

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C_1(0, \sqrt{3})$$

$$, C_2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), C_1(\sqrt{3}, 0)$$

$$, C_2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

である。

(2) (1)と同様、上の図と、そして OC の距離を考えることで、

左の図において

$O \rightarrow A \rightarrow C_1$ のとき、 $OC^2=3$ であり、確率は p^2

$O \rightarrow A \rightarrow C_2$ のとき、 $OC^2=2+\sqrt{3}$ であり、確率は $p(1-p)$

右の図において

$O \rightarrow A \rightarrow C_1$ のとき、 $OC^2=3$ であり、確率は $(1-p)p$

$O \rightarrow A \rightarrow C_2$ のとき、 $OC^2=2+\sqrt{3}$ であり、確率は $(1-p)^2$

以上から線分 OC の長さの 2 乗の期待値 $g(p)$ の値は、

$$\begin{aligned} g(p) &= 3p^2 + (2+\sqrt{3}) \times p(1-p) + 3(1-p)p + (2+\sqrt{3}) \times (1-p)^2 \\ &= (1-\sqrt{3})p + 2 + \sqrt{3} \end{aligned} \quad \dots \text{答}$$

(3) (1)(2)の結果から、

$$f(p) - g(p) = 4(p^2 - p + 1) - (1 - \sqrt{3})p - 2 - \sqrt{3}$$

$$= 4p^2 - (5 - \sqrt{3})p + 2 - \sqrt{3}$$

$$= 4\left(p - \frac{5 - \sqrt{3}}{8}\right)^2 + \frac{2 - 3\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{となり、} 0 < \frac{5 - \sqrt{3}}{8} < 1, \quad \frac{2 - 3\sqrt{3}}{8} < 0, \quad f(0) - g(0) = 2 - \sqrt{3} > 0,$$

$f(1) - g(1) = 1 > 0$ などの計算から

$|f(p) - g(p)|$ のグラフの概形は右図のようになる。

よって $|f(p) - g(p)|$ の最大値は

$$p = 0, \frac{5 - \sqrt{3}}{8}, 1 \text{ のいずれかで起こる。}$$

そこで、

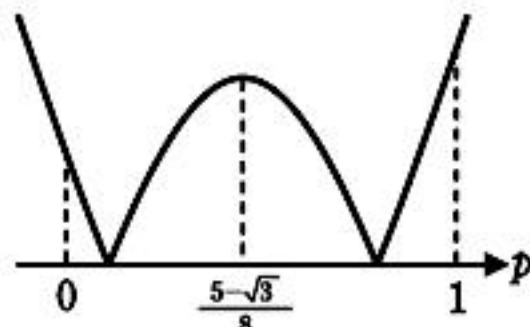
$$|f(0) - g(0)| = 2 - \sqrt{3} < 1$$

$$\left|f\left(\frac{5 - \sqrt{3}}{8}\right) - g\left(\frac{5 - \sqrt{3}}{8}\right)\right| = \frac{3\sqrt{3} - 2}{8} < 1$$

$$|f(1) - g(1)| = 1$$

の計算から求める最大値は 1 である。

…答



[V] 右図より直線 PQ の方程式は、

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ として } \frac{x}{4\cos\alpha} + \frac{y}{4\sin\alpha} = 1 \text{ とかけるので}$$

$$y = (-\tan\alpha)x + 4\sin\alpha \quad \left(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形する。

今、P は x 軸上の $2 \leq x \leq 4$ の部分を動くので、

$$2 \leq 4\cos\alpha \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \cos\alpha \leq 1$$

から $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ で考える。

(1) ①上に点 (s, y) が存在するとき、

$$y = (-\tan\alpha)s + 4\sin\alpha$$

が成立し、

$$y(\alpha) = (-\tan\alpha)s + 4\sin\alpha$$

とおくと、

$$\frac{dy(\alpha)}{d\alpha} = -\frac{4}{\cos^2\alpha} \left(\cos^3\alpha - \frac{s}{4} \right)$$

となる。今、 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ から $\frac{1}{8} \leq \cos^3\alpha \leq 1$ であることを考えると、

次の 2 通りの場合分けが考えられる。

(i) $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ のとき、常に $\frac{dy(\alpha)}{d\alpha} \geq 0$ となるので $y(\alpha)$ は α の単調増加関数である。

よって、

$$y(\alpha) \leq y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}(2-s) = t$$

が成立し、このとき $\theta = \frac{\pi}{3}$ となる。

(ii) $\frac{1}{2} < s \leq 4$ のとき、

$$\cos^3\alpha = \frac{s}{4}$$

を満たす $\alpha = \alpha_0 \left(0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{3}\right)$ が存在し、

関数 $y(\alpha)$ は右のような増減となることから

$y(\alpha)$ は $\alpha = \alpha_0$ で最大となり、 $\theta = \alpha_0 \left(0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{3}\right)$ となる。

α	0	...	α_0	...	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dy(\alpha)}{d\alpha}$		+	0	-	
y		↗		↘	

以上より、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ となるのは $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ のときである。 ...答

(2) $\frac{1}{2} < s \leq 4$ のとき、(1)の(ii)の結果から $s = 4\cos^3\theta$...答 であり、

$$t = y(\theta)$$

$$= (-\tan\theta)s + 4\sin\theta$$

$$= (-\tan\theta) \times 4\cos^3\theta + 4\sin\theta$$

$$= 4\sin^3\theta$$

となる。 ...答

(3) (1), (2)より

$$0 \leq s \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } t = \sqrt{3}(2-s)$$

$$\frac{1}{2} < s \leq 4 \text{ のとき、 } (s, t) = (4\cos^3\theta, 4\sin^3\theta) \text{ (アステロイド)}$$

となり、これを $s-t$ 平面に図示すると右下のような

曲線をえがく。これが条件の領域 F の境界である。

よって F の面積はこの曲線と s 軸、 t 軸とで囲まれる

面積となるので、

$$\frac{ds}{d\theta} = -12\sin\theta\cos^2\theta, \quad \begin{cases} s: \frac{1}{2} \rightarrow 4 \\ \theta: \frac{\pi}{3} \rightarrow 0 \end{cases} \text{ などとて、}$$

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \right) \times \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^4 t ds$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{8} + \int_{\frac{\pi}{3}}^0 4\sin^3\theta (-12\sin\theta\cos^2\theta d\theta)$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} 48\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta$$

となり、

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta) \text{ などと}$$

被積分関数の次数を下げることで、

$$48\sin^4\theta\cos^2\theta = 48 \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2} \right)^2 \times \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$= 6(\cos^3 2\theta - \cos^2 2\theta - \cos 2\theta + 1)$$

$$= \frac{3}{2}\cos 6\theta - 3\cos 4\theta - \frac{3}{2}\cos 2\theta + 3$$

から、

$$F = \frac{7\sqrt{3}}{8} + \left[\frac{1}{4}\sin 6\theta - \frac{3}{4}\sin 4\theta - \frac{3}{4}\sin 2\theta + 3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{8} + \pi \quad \cdots \text{答}$$

