

数 学

(問 題)

2006年度 早稲田大学政治経済学部

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は2～3ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 問1，問2，問3，問4の全問を解答すること。
4. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。コンパス，定規は使用してもよい。
5. 受験番号および氏名は、試験が始まってから、解答用紙の所定欄（2か所）に正確に記入すること。受験番号の記入にあたっては、次の数字見本に従うこと。

数 字 見 本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

6. 試験終了の指示がでたら、すぐに解答をやめて筆記具を置くこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
7. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

問1 次の空欄にあてはまる式または数値を解答欄に記入せよ。

x 軸と円 $\ell: x^2 + y^2 - y = 0$ から等距離にある点 $P(x, y)$ の軌跡は、曲線 m : ア および半直線 m' : イ である。ここで、円 ℓ と点 P との距離とは、 ℓ 上の点と点 P の最短距離を表す。得られた曲線 m と直線 $n: y = x$ に囲まれた領域で、円 ℓ の外部にある部分の面積は ウ である。

問2 次の説明を読み、下の各問に答えよ。解答欄に答のみ記入せよ。

1 から 8 までの正の整数の集合を X とし、 X を奇数と偶数の集合に分けて、

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$$

とする。いま、 X の要素を並べ替えて作った順列

$$P: \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \rangle$$

を次の規則 (i) ~ (iii) によって定める：

(i) x_1 は X の要素を任意に一つ定める

(ii) $(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_7, x_8)$ の各組で、

$$\begin{aligned} x_{2i-1} \in A \text{ ならば } x_{2i} \in B \\ x_{2i-1} \in B \text{ ならば } x_{2i} \in A \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

(iii) 組 (x_{2i-1}, x_{2i}) ($i = 1, 2, 3$) で、

$$\begin{aligned} x_{2i-1} \text{ と } x_{2i} \text{ のうち大きい方が } A \text{ の要素ならば } x_{2i+1} \in A \\ x_{2i-1} \text{ と } x_{2i} \text{ のうち大きい方が } B \text{ の要素ならば } x_{2i+1} \in B \end{aligned}$$

順列 P は上の (i) ~ (iii) の規則をみたすものとして、以下の問いに答えよ。

(1) P のうち x_1 から x_5 までが次のように定められた順列

$$P: \langle 1, 2, 4, 3, 6, x_6, x_7, x_8 \rangle$$

がある。このとき、順列 P の部分 $\langle x_6, x_7, x_8 \rangle$ をすべて列挙せよ。

(2) $x_1 = 1, x_2 = 4, x_8 = 8$ をみたす順列 P は何通りあるか。

(3) $x_1 = 1, x_2 = 6$ をみたす順列 P は何通りあるか。

問3 次の各問に答えよ。ただし、正の整数 n と整数 k ($0 \leq k \leq n$) に対して、 ${}_nC_k$ は正の整数である事実を使ってよい。

(1) m が 2 以上の整数のとき、 ${}_mC_2$ が m で割り切れるための必要十分条件を求めよ。答のみ解答欄に記せ。

(2) p を 2 以上の素数とし、 k を p より小さい正の整数とする。このとき、 ${}_pC_k$ は p で割り切れることを示せ。

(3) p を 2 以上の素数とする。このとき、任意の正の整数 n に対し、

$$(n+1)^p - n^p - 1$$

は p で割り切れることを示せ。

問4 四面体 $OABC$ の辺 AB を $4:5$ に内分する点を D 、辺 OC を $2:1$ に内分する点を E とし、線分 DE の中点を P 、直線 OP が平面 ABC と交わる点を Q とする。次の各問に答えよ。解答欄の空欄にあてはまる数値を記入し、(2) についてはその証明も与えよ。

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。また、 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の大きさの比 $|\overrightarrow{OP}| : |\overrightarrow{OQ}|$ を最も簡単な整数比で表せ。

(2) $\triangle ABQ$ と $\triangle ABC$ の面積比 $\triangle ABQ : \triangle ABC$ を最も簡単な整数比で表せ。

[以下余白]