

数 学

(問 題)

2006年度 早稲田大学教育学部

注 意 事 項

1. 問題冊子および記述解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～6ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. 受験番号および氏名は、試験が開始してから、解答用紙の所定欄（2か所）に正確に丁寧に記入すること。
5. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記具を置くこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
6. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 次の にあてはまる数または式を解答用紙の指定欄に記入せよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ に対し、 $A^n = A$ を満たす 2006 以下の正の整数

n は全部で ア 個ある。

(2) 定積分 $\int_4^{16} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$ の値は イ である。

(3) 1つのサイコロを続けて3回投げて、出た目を順に a_1, a_2, a_3 とする。

このとき $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となる確率は ウ である。

(4) 2^{555} は十進法で表すと 168 桁 の数で、その最高位（先頭）の数字は 1 である。集合 $\{2^n \mid n \text{ は整数で } 1 \leq n \leq 555\}$ の中に、十進法で表したとき

最高位の数字が 4 となるものは全部で エ 個ある。

2 次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を、原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線を G とする。曲線 G の方程式を求めよ。

(2) a は 1 より大きい定数とする。曲線 $x^2 - y^2 = 2$ と直線 $x = \sqrt{2}a$ とで囲まれた図形の面積を求めよ。

- 3 xy 平面上の $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し, 原点 O を始点として,
 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ となるように点 A, B をとる。線分 OA から OB
 まで反時計回りに計った角が θ のとき

$$[\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$$

と定義する。 $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ と定める。

- (1) 3つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して, 等式

$$[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$$

を示せ。

- (2) 原点 O を始点とするベクトル $\vec{a}_n = (x_n, y_n)$ を

$$\vec{a}_1 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{a}_2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\vec{a}_n = 2\vec{a}_{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

によって定める。

さらに, $n \geq 1$ に対して $r_n = [\vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}]$ とする。

- (i) r_1 を求めよ。
- (ii) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ の和を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

- (1) $0 < a < 1$ とする。このとき $x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = (1 + a^x)^{\frac{1}{x}}$$

は単調な関数（増加関数または減少関数）であることを示せ。

- (2) 次の4つの数の中から最小の数を選べ。

$$(2005^{17} + 2006^{17})^{\frac{1}{17}}, \quad (2005^{18} + 2006^{18})^{\frac{1}{18}},$$

$$(2005^{\frac{1}{17}} + 2006^{\frac{1}{17}})^{17}, \quad (2005^{\frac{1}{18}} + 2006^{\frac{1}{18}})^{18}$$

- (3) n は1より大きい整数, $p_1, p_2, \dots, p_n$ はすべて正の数とし, $0 < \alpha < \beta$ とする。

このとき

$$(p_1^\alpha + p_2^\alpha + \dots + p_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{と} \quad (p_1^\beta + p_2^\beta + \dots + p_n^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

の大小を判定せよ。

[以 下 余 白]