

数学（A方式）

（問 題）

2006年度 早稲田大学人間科学部

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、マーク解答用紙を配布する。問題冊子は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～12ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. マーク解答用紙については、受験番号を確認したうえ所定欄に氏名のみ記入すること。
5. 問1から問9までの ア , イ , ウ , …にはそれぞれ, $-49, -48, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 48, 49$ のいずれかが当てはまる。次の例にならって、マーク解答用紙のア, イ, ウ, …で示された欄にマークして答えること。

例. アに3, イに-5, ウに30, エに-24, オに0と答えたいとき。

	—	十 の 位				一 の 位									
		1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
イ	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐
ウ	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
エ	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. マークははっきり記入すること。また、訂正する場合は、消しゴムでていねいに、消し残しがないようよく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）。

マークする時	☒ 良い	☒ 悪い	☐ 悪い
マークを消す時	☐ 良い	☒ 悪い	☒ 悪い

7. 試験終了の指示がでたら、すぐに解答を止め、筆記具をおくこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
8. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

問 1. 赤と白のビーズを 7 個使いネックレスを作る. ただしビーズの形と大きさはすべて同じであり, 使わない色があってもよいものとする. このとき, ネックレスのつなぎ目については無視するとして, ネックレスの作り方は ア 通りある.

問 2. 長さが x^2 , $x+1$, $x-1$ (ただし $x+1$ が最大) である 3 つの線分により, 鈍角三角形を作ることのできるような x の値の範囲は

$$\sqrt{\boxed{\text{イ}}} < x < \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である. ただし エ の値はできる限り小さい整数で答えること.

問 3. 三角形 OAB の内部に点 P があり, 直線 AP と辺 OB の交点 Q は, 辺 OB を $3:2$ に内分し, 直線 BP と辺 OA の交点 R は, 辺 OA を $4:3$ に内分する. このとき

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{23} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{23} \overrightarrow{OB}$$

である.

問 4. 3 点 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(2,2)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を, 直線 $y = mx + m + 1$ が 2 等分するとき, 定数 m の値は $\frac{\boxed{\text{キ}} - 2\sqrt{5}}{\boxed{\text{ク}}}$ である.

問 5. 実数 x, y は $3^x + 3^y = 9^x + 9^y$ を満たす. このとき $27^x + 27^y$ のとり得る値の範囲を求めよう.

いま $3^x = A, 3^y = B, A + B = t$ とおくと

$$AB = \frac{1}{2}t \left(t + \boxed{\text{ケ}} \right)$$

である.

したがって $27^x + 27^y = \frac{1}{2}t \boxed{\text{コ}} \left(\boxed{\text{サ}} - t \right)$ となり, 求める値の範囲は

$$\boxed{\text{シ}} < 27^x + 27^y \leq \boxed{\text{ス}}$$

である.

問 6. 集合 S を

$$S = \{(x, y) \mid x, y \text{ は整数, } \log_{10} 2 + \log_{10}(6 - x)(6 + y) \geq 2 \log_{10}(y - x + 9) \}$$

とすると、 S の要素の個数は セ である。

問 7. 三角形 ABC において, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする. $2a = b + c$, 角 B と角 C の大きさの差 $(B - C)$ が 60° のとき

$$\sin A = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である.

問 8. 一辺の長さが 2 の立方体 $ABCD-EFGH$ を V とする. 立方体 V の頂点 A, C, G, E を含む平面上に, 点 E を中心とする半径 1 の円 S を描く. 点 R は, 立方体 V の内部にあり, 円 S の周上を動くものとする.

このとき, ベクトル $\overrightarrow{RA}$ と $\overrightarrow{RB}$ の内積 $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB}$ の最小値を求めよう.

(1) 面 $ABCD$ の対角線 AC と BD の交点を M とする. ベクトル $\overrightarrow{RA}$ と $\overrightarrow{MB}$ は垂直であるから $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB} = \boxed{\text{チ}} \overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RM}$ が成り立つ.

(2) さらに, 線分 AM の中点を N とすると $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB} = |\overrightarrow{RN}|^2 - \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}}$ が成り立つ.

(3) ゆえに, ベクトル $\overrightarrow{RA}$ と $\overrightarrow{RB}$ の内積 $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB}$ の最小値は $\boxed{\text{テ}} - \boxed{\text{ト}}\sqrt{2}$ である.

問 9. 点 O を原点とする座標平面上に 2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2 + 4$$

$$C_2 : y = x^2 - 2(b+1)x + 4b$$

を考える. ただし b は定数で $1 < b < 3$ とする. 2 つの放物線 C_1, C_2 は 2 点で交わる. これらの点を x 座標が小さい順に P, Q とする.

いま, 放物線 C_1 , 線分 OP および直線 $x=0$ によって囲まれる部分は第一象限にあり, その面積を S_1 とする. また 2 つの放物線 C_1, C_2 によって囲まれる部分の面積を S_2 とする.

(1) 点 Q の座標は $(\boxed{\text{ナ}}, \boxed{\text{ニ}})$ である.

(2) 面積 S_1 を, 定数 b を用いて表せば

$$S_1 = \frac{b^3 + \boxed{\text{ヌ}} b^2 + \boxed{\text{ネ}} b - 13}{\boxed{\text{ノ}}}$$

である.

(3) 面積 S_2 を, 定数 b を用いて表せば

$$S_2 = \frac{b^3 + \boxed{\text{ハ}} b^2 + \boxed{\text{ヒ}} b - 27}{\boxed{\text{フ}}}$$

である.

[以 下 余 白]

