

# 数 学

## 問 題

2006年度 早稲田大学理工学部

### 注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れに気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
4. すべての解答用紙の所定欄（各2か所）に受験番号および氏名を記入してください。
5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入してください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 試験終了の指示がでたら，すぐに解答を止め，筆記具を置いてください。終了の指示に従わず解答を続けた場合は，答案のすべてを無効とするので注意してください。
8. 問題冊子は持ち帰ってください。
9. 解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I]  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して, 関数  $f_n(x)$  を

$$f_0(x) = e^x, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

によって定める。以下の問に答えよ。

(1)  $n \geq 1$  に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x)$$

を示せ。

(2)  $n \geq 1$  とする。 $x \geq 0$  に対して, 不等式

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!} e^x$$

を示せ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$  を求めよ。

[II]  $n = 1, 2, \dots$  に対して  $x$  の整式

$$P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n+12)x - 8$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) 3 次方程式  $P_n(x) = 0$  の正の実数解はただ 1 つであることを示せ。

(2)  $t$  が  $P_n(x) = 0$  の解であるとき,  $P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right)$  を求めよ。

(3)  $P_n(x) = 0$  の正の実数解を  $\alpha_n$  とするとき,  $P_n(x) = 0$  の最小の実数解  $\beta_n$  を  $\alpha_n$  で表せ。さらに  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$  を求めよ。

[III] 数列  $a_0, a_1, a_2, \dots$  は条件

$$\begin{cases} a_0, a_1 \text{ は自然数} \\ a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n| \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

を満たすとする。以下の問に答えよ。

(1) 数列  $b_0, b_1, b_2, \dots$  を次の式で定める。

$$b_n = \begin{cases} a_{2n} & (a_{2n} \geq a_{2n+1} \text{ のとき}) \\ a_{2n+1} & (a_{2n} < a_{2n+1} \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$  がすべて正ならば  $b_n > b_{n+1}$  が成り立つことを示せ。

(2)  $a_n = 0$  を満たす  $n$  があることを示せ。

[IV]  $xy$  平面において原点  $O$  から出発する動点  $P$  が確率  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) で  $x$  軸の正方向と  $\frac{\pi}{3}$  の角度をなす方向に、確率  $1-p$  で  $x$  軸の正方向と  $-\frac{\pi}{6}$  の角度をなす方向に進み、どちらの場合も  $O$  からの距離が 1 である点に到達するものとする。この到達点を  $A$  とする。さらに動点  $P$  について以下の 2 通りの移動 (イ), (ロ) を考える。

(イ) 動点  $P$  が点  $A$  から出発し確率  $p$  で  $x$  軸の正方向と  $\frac{\pi}{3}$  の角度をなす方向に、確率  $1-p$  で  $x$  軸の正方向と  $-\frac{\pi}{6}$  の角度をなす方向に進み、どちらの場合も  $A$  からの距離が 1 である点に到達するものとする。この到達点を  $B$  とする。

(ロ) 動点  $P$  が点  $A$  から出発し確率  $p$  で  $\overrightarrow{OA}$  と  $\frac{\pi}{3}$  の角度をなす方向に、確率  $1-p$  で  $\overrightarrow{OA}$  と  $-\frac{\pi}{6}$  の角度をなす方向に進み、どちらの場合も  $A$  からの距離が 1 である点に到達するものとする。この到達点を  $C$  とする。

以下の問に答えよ。

- (1) 線分  $OB$  の長さの 2 乗の期待値  $f(p)$  を求めよ。
- (2) 線分  $OC$  の長さの 2 乗の期待値  $g(p)$  を求めよ。
- (3)  $|f(p) - g(p)|$  の最大値を求めよ。

[V] 動点  $P$  は  $x$  軸の  $2 \leq x \leq 4$  の部分、動点  $Q$  は  $y$  軸の  $y \geq 0$  の部分を  $PQ = 4$  を満たしながら動く。このとき線分  $PQ$  が動いてできる領域を  $F$  とする。また  $O$  は原点とし、 $\angle QPO$  を  $\alpha$  とする。

$0 \leq s \leq 4$  を満たす  $s$  を固定したとき、点  $(s, y)$  が  $F$  に属するような  $y$  の最大値を  $t$  とし、線分  $PQ$  が点  $(s, t)$  を通るときの  $\alpha$  の値を  $\theta$  とする。以下の問に答えよ。

- (1)  $\theta = \frac{\pi}{3}$  が成り立つ  $s$  の範囲を求めよ。
- (2)  $s$  が (1) で求めた範囲に属さないとき  $s, t$  を  $\theta$  で表せ。
- (3)  $F$  の面積を求めよ。

[以 下 余 白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。