

数 学

(問 題)

2006年度 早稲田大学国際教養学部

注 意 事 項

1. 問題冊子は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～5ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべてマーク解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルでマークすること。
4. 氏名をマーク解答用紙の所定欄（1カ所）に記入すること。
5. マークははっきり記入すること。また、訂正する場合は、消しゴムでていねいに、消し残しがないようよく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）。

マークする時	☒ 良い	☐ 悪い	☐ 悪い
マークを消す時	☐ 良い	☐ 悪い	☐ 悪い

6. 問1，問2，問3の

ア

，

イ

，

ウ

，… にはそれぞれ，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のいずれかが当てはまる。マーク解答用紙のア，イ，ウ，… で示された欄にマークして答えること。ただし，

カ
キ

 のように分数を表現するときは、既約分数（分母と分子が1より大きい公約数を持たないこと）のかたちで答えること。また，

サ
シ

や

サ
シ
ス

のように二つ以上のつながりの箇所はそれぞれ二桁の数や三桁の数を表わすものとする。
7. 試験終了の指示がでたら、すぐに解答を止め、筆記具を置くこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案の全てを無効とするので注意すること。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。
9. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。

問 1. (1) 座標平面上の 2 点 $A(0, 4)$, $B(3, 0)$ に対し線分 AB 上を動く点 P と,
円 $x^2 + y^2 = 1$ の内部 または 周上 を動く点 Q を考える. 線分 PQ を $PR : RQ = 1 : 2$
に内分する点を R とする. このとき点 R が動く範囲の面積は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ア}}} \left(\boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}} + \pi \right)$$

である.

(2) x, y が $2x^2 + 3y^2 = 1$ をみたす実数のとき, $x^2 - y^2 + xy$ の最大値は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}}}$$

である.

(3) $a > 1$ とする. 自然数 n に対して

$$f(n) = \log_a \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n \log_a \frac{(k+1)(3k+1)}{k(3k+4)}$$

とおく.

$$f(n) > \log_a \frac{62}{189}$$

をみたす n の範囲は $n \geq \boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}}$ である.

(4) ひとつのサイコロを 4 回投げ, 出た目の数を順に x, y, z, w とする. このとき
 $(x-y)(y-z)(z-w) \neq 0$ となる確率は

$$\frac{\boxed{\text{サ}} \boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}}}{216}$$

である. また $(x-y)(y-z)(z-w)(w-x) = 0$ となる確率は

$$\frac{\boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}}}{72}$$

である.

問2. 座標平面上に点 $A(5, 0)$ を中心とする半径4の円 C_1 と点 $B(3, 0)$ が与えられている. 点 $P(p, q)$ が円 C_1 の周上を動くとき, P を中心として半径の長さが $2BP$ の円 C_2 と x 軸との二つの交点を $M(m, 0), N(n, 0)$ とする. ただし, $m < n$ とする. 点 M は動点 P の位置に関係なく定まる定点となることをみよう.

点 $P(p, q)$ は円 C_1 の周上にあるから

$$p^2 + q^2 = \boxed{\text{タ}}\boxed{\text{チ}}p - \boxed{\text{ツ}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である. また円 C_2 の方程式は

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = \boxed{\text{テ}} \left((p - \boxed{\text{ト}})^2 + q^2 \right)$$

で与えられるから, 式 $\textcircled{1}$ を代入して整理すると円 C_2 の方程式は

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy - \boxed{\text{ナ}}p - \boxed{\text{ニ}} = 0$$

となる. ゆえに

$$m = -\boxed{\text{ヌ}}, \quad n = \boxed{\text{ネ}}p + \boxed{\text{ノ}}$$

となり, M は定点 $(-\boxed{\text{ヌ}}, 0)$ である.

問3. 3次関数 $f(x)$ は $x = 1$ と $x = 3$ で極値をとり, また曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(2, 2)$ における接線の方程式が $3x + y - 8 = 0$ であるとする. このとき

$$f(x) = \boxed{\text{ハ}}x^3 - \boxed{\text{ヒ}}x^2 + \boxed{\text{フ}}x$$

である. 次に, 原点 O を通る直線 l はこの曲線と2点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ で交わっているとする. ただし, $0 < x_1 < x_2$ とする. 直線 l とこの曲線とで囲まれた2つの部分の面積 S_1 と S_2 が等しくなるとき

$$x_1 = \boxed{\text{ヘ}}, \quad x_2 = \boxed{\text{ホ}}$$

である. このとき, その面積は

$$S_1 = S_2 = \boxed{\text{マ}}$$

である.

[以 下 余 白]

