

問 1

(1) 右図から、
直線 ℓ 上の任意の点 P について、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

とかけ、また P は直線 AB 上の点なので、

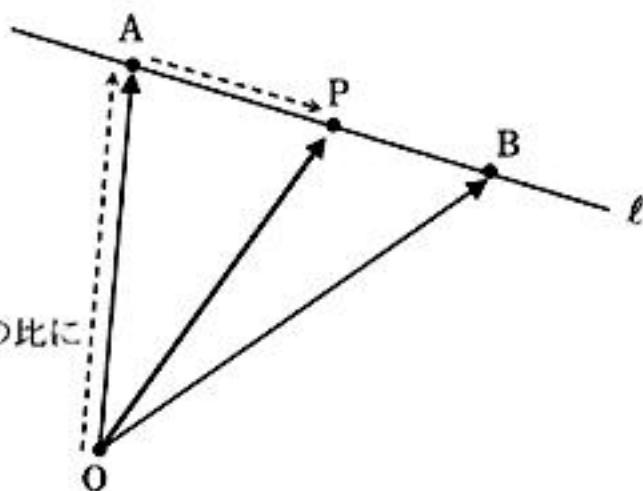
$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$$

を満たす実数 t が存在する。

$0 < t < 1$ であれば P は線分 AB を $t:1-t$ の比に
内分する点である。

以上から、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= \vec{a} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \quad \cdots \text{答}\end{aligned}$$



(2) 条件より、

$\vec{p}$ と直線 ℓ が直交

$$\Leftrightarrow \vec{p} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow t|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

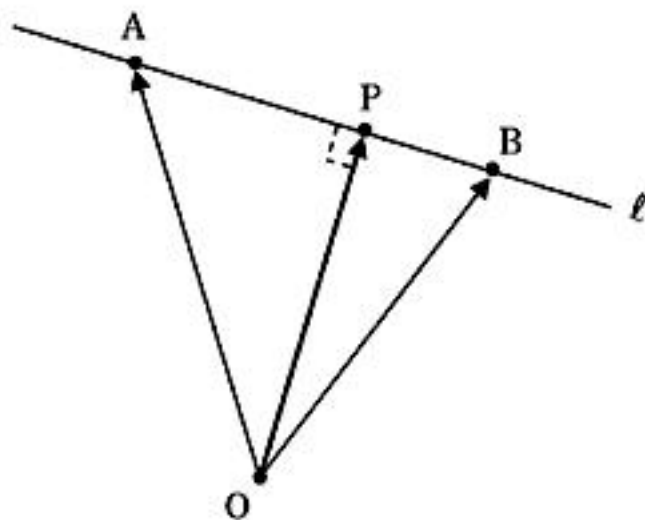
から、 $\vec{b} - \vec{a} \neq \vec{0}$ より

$$\begin{aligned}t &= \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \\ &= \frac{3^2 - 3 \times 2 \times \cos\theta}{3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos\theta} \\ &= \frac{9 - 6\cos\theta}{13 - 12\cos\theta}\end{aligned}$$

となるので、

$$\vec{p} = \vec{a} + \frac{9 - 6\cos\theta}{13 - 12\cos\theta}(\vec{b} - \vec{a}) \quad \cdots \text{答}$$

※この t の値は $|\vec{p}|$ を最小にする t でもある。



(2)別解 {正射影ベクトルの利用}

$\overrightarrow{AP}$ は $\overrightarrow{AO}$ の $\overrightarrow{AB}$ への正射影ベクトルなので、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB}$$

と書ける。よって、

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{-\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{b} - \vec{a}|^2} (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\Leftrightarrow \vec{p} = \vec{a} + \frac{|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b} - \vec{a}|^2} (\vec{b} - \vec{a}) \text{ となり、あとは計算。}$$

(3) (2)の結果の式で $t = \frac{12}{12+7} = \frac{12}{19}$ であればよいので、

$$\frac{9 - 6\cos\theta}{13 - 12\cos\theta} = \frac{12}{19}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

よって、 $\theta = 120^\circ$ $\cdots$ 答

問 2

a, b が有理数のとき、

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(A)$$

であれば、 $a = b = 0$ であることを証明する。

証明 $b \neq 0$ と仮定すると、

$$b\sqrt{3} = -a\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} = -\frac{a}{b}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots\cdots(B)$$

は同値である。(B)の左辺は有理数であるから、

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{n}{m} \quad \cdots\cdots\cdots(C)$$

とおくことができる。ただし、 m, n は正の整数で、

m と n の最大公約数は 1 である。(m と n は互いに素)

(C)の両辺を 2 乗して整理すると、

$$\frac{3}{2} = \frac{n^2}{m^2}$$

から、

$$3m^2 = 2n^2 \quad \cdots\cdots\cdots(D)$$

となる。したがって、(2 と 3 は互いに素なので) m^2 は 2 の倍数となるから、 m も 2 の倍数である。

そこで、 $m = 2\ell$ (ただし、 ℓ は正の整数) と表すと、(D)より

$$3(2\ell)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 6\ell^2 = n^2 \quad \text{となる。したがって、}$$

n^2 は 6 の倍数であり、 n も 6 の倍数である。よって、 m も n も 2 の倍数となり、 m と n の最大公約数が 1 であることに矛盾する。したがって、

(背理法により) $b = 0$ が得られた。このとき、(A)より $a = 0$ であるから、 $a = b = 0$ である。

(証明終り)

答 ア : $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left\{ \text{or } \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$ イ : 3 ウ : 2 エ : 6

問3

$$a > \frac{1}{2}, 1 \leq x \leq 2a,$$

$$y = \left(\log_2 \frac{x}{a} \right) \left(\log_2 \frac{x^2}{a^2} \right)$$

について、 $a > 0, x > 0$ なので

$$\log_2 \frac{x^2}{a^2} = \log_2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 = 2 \log_2 \frac{x}{a}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} y &= \left(\log_2 \frac{x}{a} \right) \left(2 \log_2 \frac{x}{a} \right) \\ &= 2 \left(\log_2 \frac{x}{a} \right)^2 \\ &= 2 (\log_2 x - \log_2 a)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\log_2 x = X$ とおくと、

$1 \leq x \leq 2a$ より、

$$\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 2a$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq X \leq 1 + \log_2 a$$

となり、この範囲で X の関数

$$f(X) = 2(X - \log_2 a)^2$$

の最大値、最小値を考えればよい。

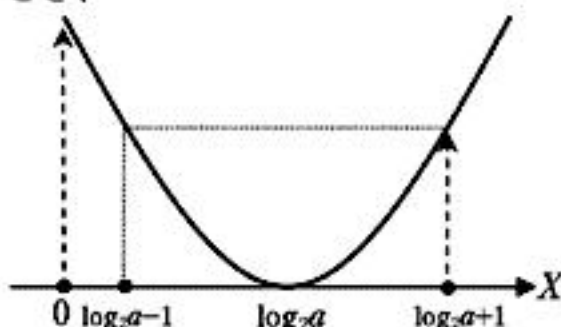
ただし、 $a > \frac{1}{2}$ から $\log_2 a > \log_2 \frac{1}{2} = -1$ を考慮することで、

(i) $0 < \log_2 a - 1 \Leftrightarrow 2 < a$ のとき、

右のようなグラフから

$$\text{最大値は } f(0) = 2(\log_2 a)^2$$

$$\text{最小値は } f(\log_2 a) = 0$$

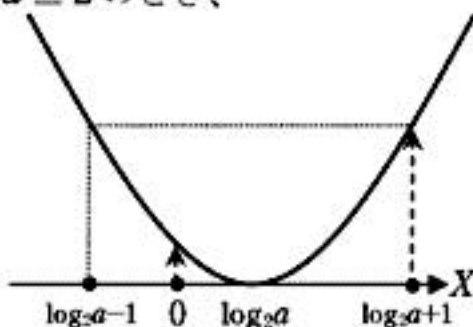


(ii) $\log_2 a - 1 \leq 0 \leq \log_2 a \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 2$ のとき、

右のようなグラフから

$$\text{最大値は } f(\log_2 a + 1) = 2$$

$$\text{最小値は } f(\log_2 a) = 0$$

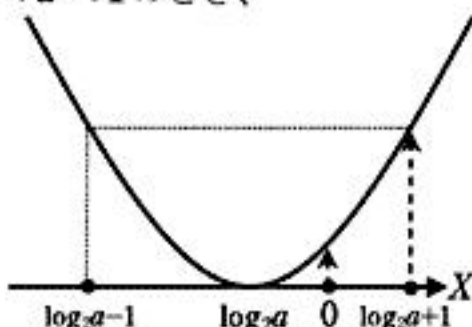


(iii) $\log_2 a < 0 < \log_2 a + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 1$ のとき、

右のようなグラフから

$$\text{最大値は } f(\log_2 a + 1) = 2$$

$$\text{最小値は } f(0) = 2(\log_2 a)^2$$



以上、まとめると、

$$\text{最大値: } \begin{cases} 2(\log_2 a)^2 & (2 < a) \\ 2 & \left(\frac{1}{2} < a \leq 2 \right) \end{cases} \quad \dots \text{答}$$

$$\text{最小値: } \begin{cases} 0 & (1 \leq a) \\ 2(\log_2 a)^2 & \left(\frac{1}{2} < a < 1 \right) \end{cases} \quad \dots \text{答}$$

問4

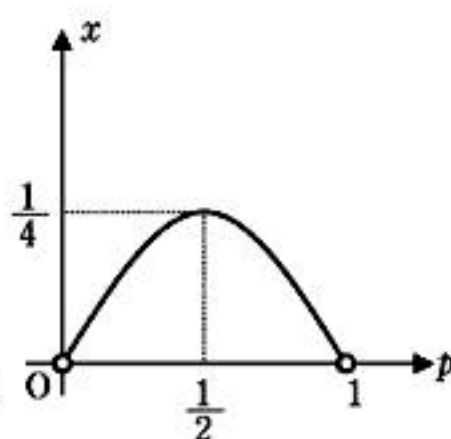
$$p+q=1, \quad pq=x \quad (0 < p < 1)$$

$$(1) \quad x=pq$$

$$=p(1-p)$$

$$=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

より $0 < p < 1$ における x の値域は
右のような放物線から



$$0 < x \leq \frac{1}{4} \quad \cdots \text{答}$$

(2)

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq$$

$$=1^2-2x$$

$$=1-2x \quad \cdots \text{答}$$

$$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2$$

$$=(1-2x)^2-2x^2$$

$$=2x^2-4x+1 \quad \cdots \text{答}$$

(3) 試行がちょうど7回で終了するのは、1回目から5回目の間に裏、表の順が1つもなく、6回目、7回目がそれぞれ裏、表のときである。すると、1回目から6回目の間に表と裏の入れ替わりが1回以下である必要がある。(2回以上あると必ず裏、表の順が現れる)

よって、何回目と何回目の間でその入れ替わりがあるかで場合わけすると、表をO、裏をUで表すことで次の6タイプしかないことが分かる。

1	2	3	4	5	6	7
O	O	O	O	O	U	O
O	O	O	O	U	U	O
O	O	O	U	U	U	O
O	O	U	U	U	U	O
O	U	U	U	U	U	O
U	U	U	U	U	U	O

よって、求める確率 y は、

$$y=(\underline{p^5+p^4q}+\underline{p^3q^2+p^2q^3}+\underline{pq^4+q^5})pq$$

$$=\{\underline{p^4(p+q)}+\underline{p^2q^2(p+q)}+\underline{q^4(p+q)}\}pq$$

$$=pq(p+q)(p^4+q^4+p^2q^2)$$

$$=x \times 1 \times (2x^2-4x+1+x^2)$$

$$=3x^3-4x^2+x \quad \cdots \text{答}$$

※他、色々な変形方法アリ

(4) $y=3x^3-4x^2+x$ について、

$$y'=9x^2-8x+1$$

から、 $y'=0 \Leftrightarrow x=\frac{4 \pm \sqrt{7}}{9}$ となる。

$$0 < \frac{4-3}{9} < \frac{4-\sqrt{7}}{9} < \frac{4-2}{9} < \frac{1}{4}$$

$$, \quad \frac{1}{4} < \frac{4+2}{9} < \frac{4+\sqrt{7}}{9}$$

の計算から右の増減表がかけ、

$$0 < x \leq \frac{1}{4} \text{ において } x=\frac{4-\sqrt{7}}{9} \text{ のとき極大値かつ最大値となる。} \quad \cdots \text{答}$$

x	(0)	...	$\frac{4-\sqrt{7}}{9}$	...	$\frac{1}{4}$
y'		+	0	-	
y	0	↗		↘	