

1.

ア	イ	ウ	エ
878	22	$\frac{a}{2} - b$	$f'(a)x + f(a) - af'(a)$

2.

APG を通る平面と、辺 DH の交点を Q とすれば、 $HQ = a$ であり、断面は平行四辺形である。 $\overrightarrow{AP} = (1, 0, -a)$ かつ、 $\overrightarrow{AE} = (1, 1, -1)$ なので、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AE}|^2 - (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AE})^2} \\ &= \sqrt{(1^2 + 0^2 + a^2) \{1^2 + 1^2 + (-1)^2\} - (1 + a)^2} \\ &= \sqrt{2(a^2 - a + 1)} \end{aligned}$$

3.

(1) $(\sqrt{x^2 + a^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ であることに注意して,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{a^2}{2} \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2}{2} \frac{1}{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2 + a^2}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + a^2} \end{aligned}$$

(2) $S_i = \frac{\sqrt{3}}{4n}$ である. A から BC に降ろした垂線の足を H とすると, $HP_i^2 = \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2}\right)^2$ であるので,

$$AP_i = \sqrt{\frac{3}{4} + HP_i^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (AP_{i-1} + P_{i-1}P_i + AP_i) S_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{i-1}{n} - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2}\right)^2} \right) \frac{\sqrt{3}}{4n} \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{8} \log \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}} \right) \right]_{-1/2}^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \log 3 \end{aligned}$$

である.

4.

(1) $ab \geq 1$ より,

$$\begin{aligned}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right) &= (a^2 + b^2) \left(1 - \frac{1}{a^2 b^2}\right) \\ &\geq 2ab \left(1 - \frac{1}{a^2 b^2}\right) \\ &= 2 \left(ab - \frac{1}{ab}\right)\end{aligned}$$

等号は $a = b$ のとき成立する.

(2) 左辺に $abc - \frac{1}{abc}$ を足したものを考える. $abc \geq 1$ なので, 2つの括弧ごとに (1) を適用していくことができ,

$$\begin{aligned}&\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) + \left(b^3 - \frac{1}{b^3}\right) + \left(c^3 - \frac{1}{c^3}\right) + \left(abc - \frac{1}{abc}\right) \\ &= \left((a^{\frac{3}{2}})^2 - \frac{1}{(a^{\frac{3}{2}})^2}\right) + \left((b^{\frac{3}{2}})^2 - \frac{1}{(b^{\frac{3}{2}})^2}\right) + \left((c^{\frac{3}{2}})^2 - \frac{1}{(c^{\frac{3}{2}})^2}\right) + \left(((abc)^{\frac{1}{2}})^2 - \frac{1}{((abc)^{\frac{1}{2}})^2}\right) \\ &\geq 2 \left((ab)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{(ab)^{\frac{3}{2}}}\right) + 2 \left((abc^4)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(abc^4)^{\frac{1}{2}}}\right) (= A \text{ とおく})\end{aligned}$$

となる. ここで, $ab \geq 1$ かつ $abc^4 \geq 1$ であることから, 再度 (1) を適用することができて,

$$\begin{aligned}A &= 2 \left(((ab)^{\frac{3}{4}})^2 - \frac{1}{((ab)^{\frac{3}{4}})^2}\right) + 2 \left(((abc^4)^{\frac{1}{4}})^2 - \frac{1}{((abc^4)^{\frac{1}{4}})^2}\right) \\ &\geq 4 \left(abc - \frac{1}{abc}\right)\end{aligned}$$

であるので, 両辺から $abc - \frac{1}{abc}$ を引いて,

$$\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) + \left(b^3 - \frac{1}{b^3}\right) + \left(c^3 - \frac{1}{c^3}\right) \geq 3 \left(abc - \frac{1}{abc}\right)$$

を得る.