

1

(1) サイコロを3回振った後に、点(2,2)にある条件とその確率は、

- 1,2,3が1回ずつ出る $\dots \frac{3!}{6^3} = \frac{6}{216}$

- 3が2回, 4,5,6のいずれかが1回出る $\dots \frac{3 \times 3}{6^3} = \frac{9}{216}$

の2つの場合しかないなので、その合計確率は

$$\frac{6}{216} + \frac{9}{216} = \frac{5}{72}$$

(2) $\{a_i\} = \{a_1, \frac{a_1}{3}, \frac{a_1}{6}, \frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{15}, \dots\}$ より、一般項は

$$a_n = \frac{a_1}{\sum_{k=1}^n k} = \frac{2a_1}{n(n+1)}$$

と予想することができる.

$n \geq 2$ のとき, $k \leq n-1$ で予想式が成り立つと仮定すると

$$a_n = \frac{1}{n^2-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i = \frac{1}{n^2-1} \cdot (n-1)^2 a_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} = \frac{2a_1}{n(n+1)}$$

より, $k=n$ でも成り立つということがわかる. $n=1, 2$ での成立から帰納的に, 予想式は全ての n について成り立つといえる. したがって,

$$a_{999} = \frac{2 \cdot 99900}{999 \cdot 1000} = \frac{1}{5}$$

(3) 与えられた条件は,

適切な t をとれば $f(x) = x^3 + x^2 + x - mx + t = 0$ が相異なる3解をもつ

と同値である. これはつまり $y = f(x)$ が極値をもつことと同値である, つまり

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + (1-m) = 0$$

が相異なる2解を持つことと同値なので

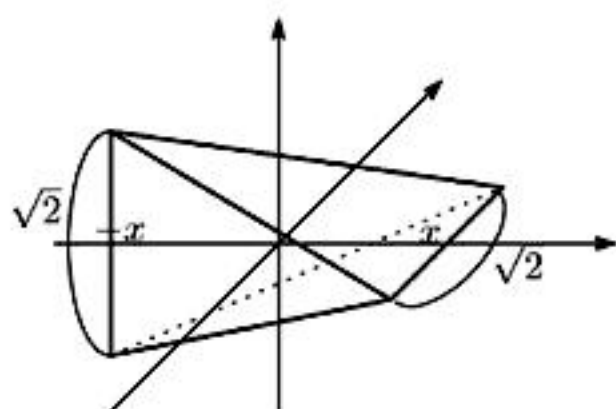
$$1 - 3 \cdot (1-m) > 0 \quad \therefore m > \frac{2}{3}$$

(4) 対称性から $x > 0$ を用いて A, B の座標を $\left(-x, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, C, D の座標を $\left(x, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ と設定することができる. このとき,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (2x)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \sqrt{5}^2 \quad \therefore x = 1$$

であり, また, 球の中心は原点と一致するので

$$r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



$P_n(x_n, y_n)$ とすると, $x_n > 0, y_n > 0$ であり, y_n は円 C_n の半径を表わしている.

このとき, 図に表わした 2 つの直角三角形 $\triangle P_0 P_n A$ と $\triangle P_{n-1} P_n B$ において三平方の定理より

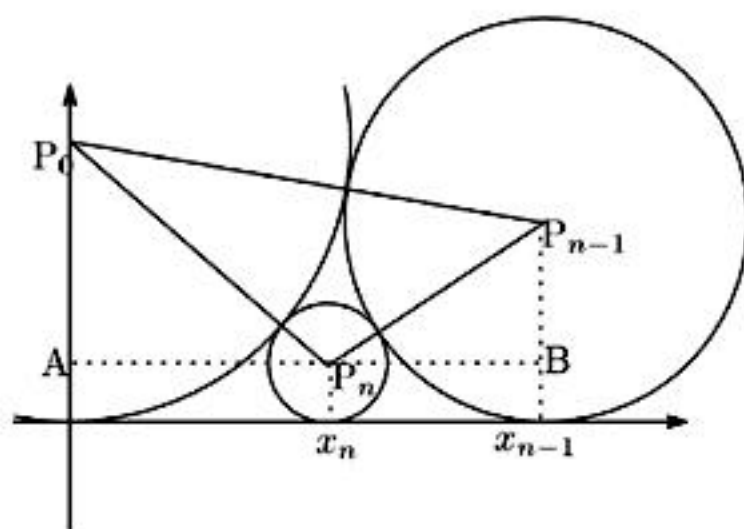
$$\begin{cases} x_n^2 + (1 - y_n)^2 = (1 + y_n)^2 \\ (x_{n-1} - x_n)^2 + (y_{n-1} - y_n)^2 = (y_{n-1} + y_n)^2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_n^2 = 4y_n \\ (x_{n-1} - x_n)^2 = 4y_{n-1}y_n \end{cases}$$

これらを x_n についてまとめると

$$(4 - x_{n-1}^2)x_n^2 - 8x_{n-1}x_n + 4x_{n-1}^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる.



(1) $\textcircled{1}$ において, $n = 2$ のとき $x_1 = 2$ より

$$-16x_2 + 16 = 0 \quad \therefore x_2 = 1$$

したがって $P_2\left(1, \frac{1}{4}\right)$. また, $n = 3$ のときも同様に

$$\begin{aligned} 3x_3^2 - 8x_3 + 4 &= 0 \\ (3x_3 - 2)(x_3 - 2) &= 0 \\ \therefore x_3 &= \frac{2}{3}, 2 \end{aligned}$$

$x_3 = 2$ は $y_3 = 1$ となり, 条件に合わないので $P_3\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$.

(2) (1) より, $n \geq 1$ での P_n の座標は $P_n\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ と予想され, この式が $n = 1, 2, 3$ において成立することが確認できる.

$n = k - 1$ での成立を仮定すると $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} \left\{4 - \frac{4}{(k-1)^2}\right\} x_k^2 - \frac{16}{k-1} x_k + \frac{16}{(k-1)^2} &= 0 \\ \{(k-2)x_k - 2\}(kx_k - 2) &= 0 \\ \therefore x_k &= \frac{2}{k}, \frac{2}{k-2} \end{aligned}$$

$x_k = \frac{2}{k-2}$ は $y_k = \frac{1}{(k-2)^2} > y_{k-1}$ となり不適なので $P_k\left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$.

したがって, 帰納的に $n \geq 1$ において

$$P_n\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$$

であることが示された.

また, $n = 0$ では $P_0(0, 1)$ である.

(1) $f(n) = 5$ となる条件は

$$5 \leq \frac{n}{[\sqrt{n}]} < 6 \iff 5[\sqrt{n}] \leq n < 6[\sqrt{n}]$$

である。また、

$$\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$$

より

$$\sqrt{n} \leq \frac{n}{[\sqrt{n}]} < \frac{n}{\sqrt{n} - 1}$$

なので、 $6 < \sqrt{n}$ や $\frac{n}{\sqrt{n} - 1} \leq 5$ の範囲は条件を満たさない。これらを解くと $n \leq 14$, $37 \leq n$ となるので $15 \leq n \leq 36$ の範囲を調べればよい。

- $n = 15$ のとき, $[\sqrt{n}] = 3$ より $f(n) = 5$ となり解である。
- $16 \leq n < 25$ のとき, $[\sqrt{n}] = 4$ より $20 \leq n < 24$ となり $n = \{20, 21, 22, 23\}$ 。
- $25 \leq n < 36$ のとき, $[\sqrt{n}] = 5$ より $25 \leq n < 30$ となり $n = \{25, 26, 27, 28, 29\}$ 。
- $n = 36$ のとき, $[\sqrt{n}] = 6$ より $f(n) = 6$ となり不適。

以上より, $f(n) = 5$ となる n の最小値は 15, 最大値は 29 である。

(2)

$$[\sqrt{n+1}] = \begin{cases} [\sqrt{n}] + 1 & (n+1 \text{ が平方数の場合}) \\ [\sqrt{n}] & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

より, $n+1$ が非平方数の場合は

$$f(n+1) = \left\lceil \frac{n+1}{[\sqrt{n}]} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n}{[\sqrt{n}]} \right\rceil = f(n)$$

となるため $f(n) > f(n+1)$ となることはありえない。したがって, $f(n) > f(n+1)$ となる可能性があるのは $n+1$ が平方数の場合だけである。

また逆に, $n = k^2 - 1$ ($k \geq 2$) の場合

$$\begin{aligned} f(n) &= \left\lceil \frac{k^2 - 1}{[\sqrt{k^2 - 1}]} \right\rceil = k + 1 \\ f(n+1) &= \left\lceil \frac{k^2}{[\sqrt{k^2}]} \right\rceil = k \end{aligned}$$

より $f(n) > f(n+1)$ が常に成り立つ。

したがって, 条件を満たす n は $n+1$ が平方数となる数であり,

$$44^2 = 1936 < 2007 < 45^2 = 2025$$

なので, 求める n の個数は 43 個となる。