

問 1.

ア	イ	ウ	エ
3	4	3	2

二項定理より, $(a+b)^n$ における $a^k b^{n-k}$ の係数は ${}_nC_k$ である. ここで, $a = x^2$, $b = \frac{1}{x}$ とすると $r = 3k - 2n$ より x^r の係数は

$${}_{2n}C_k = \frac{(2n)!}{\left\{\frac{1}{3}(4n-r)\right\}! \left\{\frac{1}{3}(2n+r)\right\}!}$$

問 2.

オ	カ
32	4

x は対数の底や真数になるので, $x \neq 1, x > 0$ である. ここで $X = \log_2 x$ とすると

$$\log_x 512 + \log_x \frac{2}{x^7} + \log_2 x = 0$$

$$\frac{9}{X} + \frac{1}{X} - 7 + X = 0$$

$$X^2 - 7X + 10 = 0$$

$$X = 2, 5$$

ここで, $x = 2^X$ より

$$x = 4, 32$$

が解となるが, $\alpha > \beta$ より

$$\alpha = 32, \beta = 4$$

問3.

キ	ク	ケ
5	31	28

条件から $|\overrightarrow{OA}| = 5$, $|\overrightarrow{OB}| = 2$ である. また, $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 = 25 + 4 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 18$ より $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{11}{2}$ である. また, $\overrightarrow{OP} = \frac{12\overrightarrow{OB} - 5\overrightarrow{OA}}{21}$ より

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{12^2 \cdot |\overrightarrow{OB}|^2 + 5^2 |\overrightarrow{OA}|^2 - 120 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{21^2} = \frac{541}{441},$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{12 \cdot |\overrightarrow{OB}|^2 - 5 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{21} = \frac{41}{42}$$

以上より,

$$\triangle OBP = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 |\overrightarrow{OP}|^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP})^2} = \frac{5\sqrt{31}}{28}$$

問4.

コ	サ
40	9

$$z_1 + z_2 = (\cos \alpha + \cos \beta) + i(\sin \alpha + \sin \beta) = \frac{5}{7} + \frac{4}{7}i$$

実部と虚部の対応を見ると

$$\begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta = \frac{5}{7} & \cdots \textcircled{1} \\ \sin \alpha + \sin \beta = \frac{4}{7} & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで $\textcircled{1}^2 - \textcircled{2}^2$ より

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos(\alpha + \beta) &= \frac{9}{49} \\ 2\cos(\alpha + \beta)\{\cos(\alpha - \beta) - 1\} &= \frac{9}{49} \\ \therefore \cos(\alpha + \beta) &= \frac{9}{49} \cdot \frac{1}{2\{\cos(\alpha - \beta) - 1\}} \end{aligned}$$

$2 \times \textcircled{1} \times \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \sin 2\beta + 2\sin(\alpha + \beta) &= \frac{40}{49} \\ 2\sin(\alpha + \beta)\{\cos(\alpha - \beta) - 1\} &= \frac{40}{49} \\ \therefore \sin(\alpha + \beta) &= \frac{40}{49} \cdot \frac{1}{2\{\cos(\alpha - \beta) - 1\}} \end{aligned}$$

したがって

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{40}{9}$$

問5.

シ	ス	セ	ソ
-7	1	-3	7

1つ目の命題を満たすための条件は、あらゆる x に対して

$$-x^2 + (a+2)x + a - 3 < x^2 - (a-1)x - 2$$

$$2x^2 - (2a+1)x - a + 1 > 0$$

$$2\left(x - \frac{2a+1}{4}\right)^2 - \frac{4a^2 + 12a - 7}{8} > 0$$

が成り立つことである。 $(\dots)^2 \geq 0$ より

$$4a^2 + 12a - 7 < 0$$

$$(2a+7)(2a-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{7}{2} < a < \frac{1}{2}$$

次に、左辺の最大値は

$$\begin{aligned} -x^2 + (a+2)x + a - 3 &= -\left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + 8a - 8}{4} \\ &\leq \frac{a^2 + 8a - 8}{4} \end{aligned}$$

となる。また、右辺の最小値は

$$\begin{aligned} x^2 - (a-1)x - 2 &= \left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 2a + 9}{4} \\ &\geq -\frac{a^2 - 2a + 9}{4} \end{aligned}$$

である。したがって、2つ目の命題を満たす条件は

$$\frac{a^2 + 8a - 8}{4} < -\frac{a^2 - 2a + 9}{4}$$

$$\therefore \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} < a < \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}$$

問6.

タ	チ
5	2

$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DO}$ を使って他のベクトルを表わすと

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DO},$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DO}$$

となる。ここで点 A から下ろした垂線の足を H とすると、2 実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} + s\overrightarrow{CP} + t\overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{DA} = \left(\frac{s}{2} + \frac{t}{2} - 1\right)\overrightarrow{DA} + \left(1 - s - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{DC} + \frac{t}{2}\overrightarrow{DO}$$

とおける。ここで $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CQ}$ より

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{2} + \frac{t}{2} - 1 \right) |\overrightarrow{DA}|^2 - \left(1 - s - \frac{t}{2} \right) |\overrightarrow{DC}|^2 = 0 \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{2} + \frac{t}{2} - 1 \right) |\overrightarrow{DA}|^2 - \frac{1}{2} \left(1 - s - \frac{t}{2} \right) |\overrightarrow{DC}|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2} |\overrightarrow{DO}|^2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore s = 1, t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DO}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\frac{1}{16}(|\overrightarrow{DA}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2 + |\overrightarrow{DO}|^2)} = \frac{5}{2}$$

問7.

ツ	テ
5	3

2実数 a, b を用いて $A^2 = aA + bE$ とすると

$$A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = aA \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + b \\ 3a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2A^2 = A + E$$

したがって

$$8A^4 = 2 \cdot (2A^2)^2 = 2(A + E)^2 = 2A^2 + 4A + 2E = 5A + 3E$$

問 8.

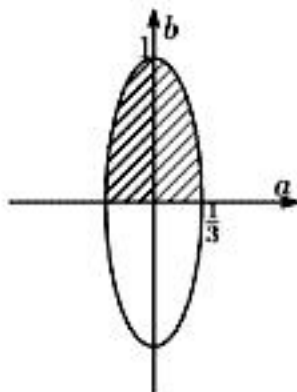
ト	ナ	ニ
-2	16	2

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = [3a \sin x - b \cos x]_0^{\pi} = 2b \geq 0$$

$$\int_0^{\pi} \{f(x)\}^2 dx = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) dx + 3ab \int_0^{\pi} \sin 2x dx + \frac{b^2}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} (9a^2 + b^2) \leq \frac{\pi}{2}$$

より, (a, b) の動く範囲は

$$b \geq 0, \quad 9a^2 + b^2 \leq 1$$



となる. この数式が示す領域を図示すると図のようになるので, r と θ を使って

$$a = \frac{r}{3} \cos \theta, \quad b = r \sin \theta \quad (0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi)$$

と表わすことができる. これらを使うと

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2}a\pi + 2b = \frac{\pi}{2}r \cos \theta + 2r \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{2} r \sin(\theta + \alpha) \quad \left(\alpha \text{ は } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{\pi^2 + 16}} \\ \sin \alpha = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 16}} \end{cases} \text{ をみたす数} \right) \end{aligned}$$

となるので, I の範囲は

$$-\frac{\pi}{2} \leq I \leq \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{2}$$

である. 等号は $r = 1, \theta = \pi$ のとき (最小値) と $r = 1, \sin(\theta + \alpha) = 1$ のとき (最大値) に成立する.

問9.

ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ
1	1	-8	-2	5

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x^{n+2} - y^{n+2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x^{n+1} - y^{n+1})(x + y) - \frac{xy}{\sqrt{5}}(x^n - y^n) \\ &= -a_{n+1} + a_n \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = a_{n+1} + a_{n+2}$$

この式を使って順に求めていくと, $a_1 = 1, a_2 = -1$ より,

$$\{a_n\} = \{1, -1, 2, -3, 5, -8, \dots\}$$

となるので $a_6 = -8$ である.

①の両辺を a_{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{-1} - 1$$

$n \rightarrow \infty$ とすれば $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \alpha$ となるので

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\alpha} - 1 \\ \alpha^2 + \alpha - 1 &= 0 \\ \alpha &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

ここで, 帰納的に $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$ であるから $\alpha < 0$. したがって

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ \alpha^3 &= -2 - \sqrt{5} \end{aligned}$$