

問 1.

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
-2	5	1	1	16	2	-2	-8	-8	20	-16

(1) 与式を解くと

$$(x-1)(x^2-x+p)=0$$

$$x=1, \frac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}$$

$p > 0$ より $\sqrt{1-4p} < 1$ なので $\frac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2} < 1$. したがって、公比を r とすると

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-4p}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1-4p}}{2}, 1 \right\} \quad (r \geq 1)$$

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \left\{ 1, \frac{1 + \sqrt{1-4p}}{2}, \frac{1 - \sqrt{1-4p}}{2} \right\} \quad (r < 1)$$

のいずれかである. このいずれであっても、これらが等比数列となる条件は

$$x_1 x_3 = x_2^2 \quad \therefore p = -2 + \sqrt{5}$$

である. これを使って公比 r を求めると、 $r > 1$ より

$$r = \frac{x_3}{x_2} = \frac{2}{1 + \sqrt{1-4p}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(2) 与式を解くと

$$(x+1) \left(x^2 + 2 \cos \frac{\theta}{3} + 1 \right) = 0$$

$$x = -1, z_1, z_2$$

二次方程式部分の解と係数の関係より

$$\begin{cases} z_1 z_2 = r^2 = 1 \\ z_1 + z_2 = 2 \cos \omega = -2 \cos \frac{\theta}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} r = 1 \\ \cos \omega = -\cos \frac{\theta}{3} \end{cases}$$

ここで $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より

$$\frac{1}{2} \leq \cos \frac{\theta}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \omega \leq -\frac{1}{2}$$

$180^\circ < \omega < 360^\circ$ より $\cos \omega$ が最大となるのは $\omega = 240^\circ = (15 \times 16)^\circ$ のときである.

(3) 条件から 2 実数 a, b を使って

$$f(x) = a(x-2)^2, \quad g(x) = b(x-2)^2(x-4)$$

とおけるので、点 Q の座標を代入して

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{8}$$

が求まる. これらを代入して展開すると

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2, \quad g(x) = \frac{1}{-8}(x^3 - 8x^2 + 20x - 16)$$

問2.

シ	ス	セ	ソ	タ	チ
12	1	5	5	2	6

条件から

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{12}\vec{c} \\ \therefore \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PQ} = k\vec{a} + k\vec{b} + \left(\frac{1}{12}k + \frac{1}{6}\right)\vec{c}\end{aligned}$$

また,

$$\overrightarrow{OR} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

とも書けるので, これらから

$$(k, s, t) = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \quad \therefore \overrightarrow{OR} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$$

を得る.

つぎも同様に考えると, 3 実数 l, u, v を使って

$$\overrightarrow{OS} = l\overrightarrow{OD} + (1-l)\overrightarrow{OR} = (1-u-v)\vec{a} + u\vec{b} + v(\vec{a} + \vec{c})$$

と 2 通りに表すことができる. これを解くと

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

問3.

ツ	テ	ト	ナ
11	43	24	4

a_n の一般項は $a_n = 5^n$ となるので

$$\log_{10} a_n = n \log_{10} 5 = n(1 - \log_{10} 2) = 0.6990n$$

(1) $\log_{10} a_n = 0.6990n > 6.99$ より $n > 10$. これを満たす最小の自然数 n は 11 である.

(2) a_n が 100 桁となる条件は

$$10^{99} \leq a_n < 10^{100}$$

$$99 \leq 0.6990n < 100$$

ここで $143 \times 0.6990 = 99.957 < 100 < 144 \times 0.6990 = 100.656$ より, 条件を満たす最大の自然数 n は $143 = 100 + 43$ である.

(3)

$$b_n = \sum_{k=1}^n \log_{10} a_k = \frac{0.6990}{2} n(n+1) > 200$$

ここで $0.699 \cdot 23 \cdot 24 = 385.848 < 400 < 0.699 \cdot 24 \cdot 25 = 419.4$ より, 条件を満たす最小の自然数 n は 24 である.

(4) $c_n = \sum_{k=1}^n b_k = \frac{0.6990}{6} n(n+1)(n+2)$ より,

$$\log_{10}(c_n \cdot \log_5 10) > 1$$

$$\frac{0.6990}{6} n(n+1)(n+2) > 10 \log_{10} 5$$

$$n(n+1)(n+2) > 60$$

ここで $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 < 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ より, 条件を満たす最小の自然数 n は 4 である.

問 4.

ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ
15	4	3	-2	27	2	4	4

(1) 接点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ における円 C_1 の接線は

$$x \cos \theta + y \sin \theta - 1 = 0$$

とおくことができるので、この接線が円 C_2 に接する条件は

$$\begin{aligned} |8 \cos \theta - 1| &= 3 \\ \therefore (\cos \theta, \sin \theta) &= \left(-\frac{1}{4}, \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (\text{複号任意}) \end{aligned}$$

である。これらの傾き $-\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ を考慮すると、

$$\begin{aligned} l_1 : x + \sqrt{3}y - 2 &= 0 \\ l_2 : x + \sqrt{15}y + 4 &= 0 \\ l_3 : x - \sqrt{15}y + 4 &= 0 \\ l_4 : x - \sqrt{3}y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

である。

また、2 直線 l_1 と l_4 は直線 $x = 2$ について対称なので、これらに接する放物線 $y = f(x)$ もまた直線 $x = 2$ について対称であるから

$$f(x) = a(x - 2)^2 + c$$

と書ける。また、 $f'(x) = 2a(x - 2)$ と、点 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で l_1 に接することから

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore a &= \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{27}}, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

以上をまとめると

$$a = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{27}}, \quad b = 2, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となる。

つぎに、面積を求める領域も直線 $x = 2$ について対称なので、求める面積を S とすると

$$S = 2 \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) - \frac{-x+2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$