

[1]

α, β は $\alpha, \beta \neq 0$ であるような複素数

$p_1 = 3, p_n = 1 + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} (n=1, 2, 3, \dots)$ について、

(1) $p_2 = 1 + \alpha + \beta, p_4 = 1 + \alpha^3 + \beta^3$ である。

そこで $p_2 = p_4 = 0$ とすると、

$$\begin{cases} 1 + \alpha + \beta = 0 \\ 1 + \alpha^3 + \beta^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = 0 \end{cases} \text{ となるが、これは } \alpha, \beta \text{ の設定 } \alpha, \beta \neq 0 \text{ に矛盾。}$$

よって $p_2 \neq 0, p_4 \neq 0$ のどちらかが成立する。…証明終り

(2) (*)隣接する2項の積はすべて0となる。すなわち

$$p_n p_{n+1} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

について、 $n=1$ のとき、

$$\begin{aligned} p_1 p_2 = 0 &\Leftrightarrow 3(1 + \alpha + \beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha + \beta = -1 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また $n=3$ のとき、

$$p_3 p_4 = 0 \Leftrightarrow (1 + \alpha^2 + \beta^2)(1 + \alpha^3 + \beta^3) = 0$$

が成立するが、(1)の結果から $p_2 = 0$ であれば $p_4 \neq 0$ であるので、

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立。②を変形して、

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$$

これに①を代入することで、

$$\alpha\beta = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

①、③より α, β は t に関する2次方程式

$$t^2 + t + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

の2解である。これを解くと

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

となる。よって、

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} \right) \text{ (複号同順)} \quad \dots \text{答}$$

また④について、

$$(t-1)(t^2 + t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 = 1$$

より $1, \alpha, \beta$ は1の3乗根であり、 $\alpha^3 = \beta^3 = 1$ を満たすので、

$p_n = 1 + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ について、 k を整数とすると

$$p_{3k+1} = 1 + \alpha^{3k} + \beta^{3k} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$p_{3k+2} = 1 + \alpha^{3k+1} + \beta^{3k+1} = 1 + \alpha + \beta = 0 \quad (\textcircled{1} \text{より})$$

$$p_{3k+3} = 1 + \alpha^{3k+2} + \beta^{3k+2} = 1 + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad (\textcircled{2} \text{より})$$

から、

$$p_n = \begin{cases} 3 & (n \text{ は } 3 \text{ で割ると余り } 1) \\ 0 & (n \text{ は } 3 \text{ で割ると余り } 0 \text{ または } 2) \end{cases} \quad \dots \text{答}$$

※この α, β は1の3乗根の実数ではない2つであり、特に ω, ω^2 で表されることが多い。 $p_n = 1 + \omega^{n-1} + (\omega^2)^{n-1}$ の形であったのだ。

[II]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 条件を満たす定点 R の座標を (X, Y) とする。

$$A \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+c)t-1 \\ 3t-4 \end{pmatrix}$$

から $Q((1+c)t-1, 3t-4)$ となる。

よって、 $\angle QPR = 90^\circ$ の条件から、

$$\vec{PR} \cdot \vec{PQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - (t-1), Y - t) \cdot (ct, 2t-4) = 0$$

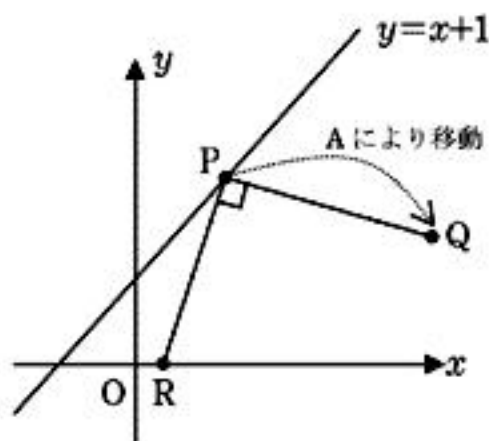
$$\Leftrightarrow -(c+2)t^2 + (cX + 2Y + c + 4)t - 4Y = 0$$

これが任意の実数 t で成立するための条件は、

$$\begin{cases} -(c+2) = 0 \\ cX + 2Y + c + 4 = 0 \\ -4Y = 0 \end{cases} \text{ を満たすことであり、これを解いて}$$

$X=1, Y=0, c=-2$ となる。よって、

$$R(1, 0), c=-2 \quad \dots \text{答}$$



(2) $\triangle PQR$ は直角三角形なので、その外接円は QR を直径とする円になる。半径は QR の長さの半分であり、

$$QR^2 = (t+2)^2 + (3t-4)^2 = 10t^2 - 20t + 20$$

から、外接円の半径を r とすると

$$r = \frac{1}{2}QR = \frac{1}{2}\sqrt{10t^2 - 20t + 20}$$

となる。よって外接円の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 \\ &= \pi \times \frac{1}{4}(10t^2 - 20t + 20) \\ &= \frac{5}{2}\pi \{(t-1)^2 + 1\} \end{aligned}$$

となるので、これは $t=1$ のとき最小値 $\frac{5}{2}\pi$ となる。 $\dots$ 答

[Ⅲ]

(1) $\int e^{-x} \cos x dx$ について、

$e^{-x}(p \sin x + q \cos x) + C$ を x で微分することで、

$$-e^{-x}(p \sin x + q \cos x) + e^{-x}(p \cos x - q \sin x) \\ = e^{-x}\{- (p+q) \sin x + (p-q) \cos x\}$$

これが $e^{-x} \cos x$ と一致するので、

$$\begin{cases} p+q=0 \\ p-q=1 \end{cases} \text{ を解いて、 } \begin{cases} p=\frac{1}{2} \\ q=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ である。} \quad \dots \text{答}$$

※勿論部分積分を2回行ってもよい。

(2) 関数 $f(x) = e^{-x} - e^{-x} |\cos x|$ を考えると、

$f(x) = e^{-x}(1 - |\cos x|)$, $0 \leq |\cos x| \leq 1$ から

任意の x で $f(x) \geq 0$ であり、 $x = n\pi$ (n は整数) で $f(x) = 0$ となる。

以上をもとに $y = e^{-x}$, $y = e^{-x} |\cos x|$ のグラフの概形を考えることで

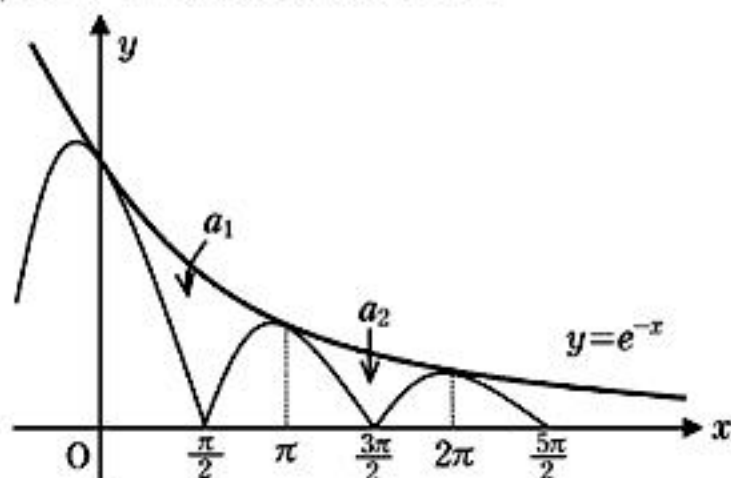
右のようなグラフがかけ。

そこで、

$$a_1 = \int_0^{\pi} e^{-x} (1 - |\cos x|) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} (1 - \cos x) dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-x} (1 + \cos x) dx$$



$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} (1 - 0) - \left\{ -e^0 - \frac{1}{2} e^0 (0 - 1) \right\}$$

$$-e^{-\pi} + \frac{1}{2} e^{-\pi} (0 + 1) - \left\{ -e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} (1 - 0) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\pi} - e^{-\frac{\pi}{2}} \quad \dots \text{答}$$

(3)

$$a_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} (1 - |\cos x|) dx$$

$$= \int_{(n-1)\pi}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} e^{-x} (1 - |\cos x|) dx + \int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{n\pi} e^{-x} (1 - |\cos x|) dx$$

$$= \left[-e^{-x} + \frac{1}{2} (-1)^n e^{-x} (\sin x - \cos x) \right]_{(n-1)\pi}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$+ \left[-e^{-x} - \frac{1}{2} (-1)^n e^{-x} (\sin x - \cos x) \right]_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{n\pi}$$

$$= -e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{2} (-1)^n e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} \left\{ \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi - \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \right\}$$

$$- \left[-e^{-(n-1)\pi} + \frac{1}{2} (-1)^n e^{-(n-1)\pi} \left\{ \sin (n-1) \pi - \cos (n-1) \pi \right\} \right]$$

$$+ \left\{ -e^{-n\pi} - \frac{1}{2} (-1)^n e^{-n\pi} (\sin n\pi - \cos n\pi) \right\}$$

$$- \left[-e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{2} (-1)^n e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} \left\{ \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi - \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \right\} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} + e^{-(n-1)\pi} - \frac{1}{2} e^{-(n-1)\pi}$$

$$-e^{-n\pi} + \frac{1}{2} e^{-n\pi} - \frac{1}{2} e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-(n-1)\pi} - \frac{1}{2} e^{-n\pi} - e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\pi} - e^{-\frac{\pi}{2}} \right) e^{-(n-1)\pi} \quad \dots \text{答}$$

a_1

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_1 e^{-(k-1)\pi} \quad \left[a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\pi} - e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ である} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \sum_{k=1}^n (e^{-\pi})^{k-1}$$

公比 $e^{-\pi}$ ($0 < e^{-\pi} < 1$) の無限等比級数は収束し和を持つので、

$$a_1 \times \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = a_1 \times \frac{e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} = \frac{e^{\pi} - 1 - 2e^{\frac{\pi}{2}}}{2(e^{\pi} - 1)} \quad \dots \text{答}$$

[IV]

(1) $k \geq 1, n \geq 1, f(x) = (1-x)^n x^k (0 \leq x \leq 1)$ について、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -n(1-x)^{n-1} x^k + (1-x)^n \cdot kx^{k-1} \\ &= x^{k-1} (1-x)^{n-1} \{k - (n+k)x\} \end{aligned}$$

これと $0 < \frac{k}{n+k} < 1$ とで下のような増減表がかけられる。

x	0	...	$\frac{k}{n+k}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗		↘	0

よって、

$$a_n = f\left(\frac{k}{n+k}\right) = \left(1 - \frac{k}{n+k}\right)^n \left(\frac{k}{n+k}\right)^k$$

となる。そこで、

$$1 - \frac{k}{n+k} = \frac{n}{n+k} = \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \text{ と変形できるので、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}\right\}^k} = \frac{1}{e^k} \quad (\text{収束})$$

また $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{n+k}\right)^k = 0$ (収束) なので $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ も収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e^k} \times 0 = 0 \quad \cdots \text{答}$$

(2) $0 \leq x \leq 1$ において、

関数 $(1-x)^n f(x)$ は $x=b$ で最大値 b_n 、

関数 $(1-x)^n g(x)$ は $x=c$ で最大値 c_n 、

関数 $(1-x)^n \{f(x) + g(x)\}$ は $x=d$ で最大値 d_n をとるとすると、

$$\begin{aligned} d_n &= (1-d)^n \{f(d) + g(d)\} \\ &= (1-d)^n f(d) + (1-d)^n g(d) \\ &\leq (1-b)^n f(b) + (1-c)^n g(c) \\ &= b_n + c_n \end{aligned}$$

が常に成立。

また、関数 $(1-x)^n \{f(x) + g(x)\}$ は $x=1$ で 0 となるので、

関数 $(1-x)^n \{f(x) + g(x)\}$ の最大値は 0 以上、つまり $d_n \geq 0$ である。

以上より、

$$0 \leq d_n \leq b_n + c_n \quad \cdots \text{答}$$

(3)

まず条件より、

$$(1-x)^n (px^2 + qx + r) \leq e_n$$

について $x=0$ とすることで

$$r \leq e_n$$

が成立。次に(2)の結果を利用することで、 $0 \leq x \leq 1$ において

$(1-x)^n (px^2 + qx + r)$ の最大値 e_n

$\leq p(1-x)^n x^2$ の最大値 $+ q(1-x)^n x$ の最大値 $+ (1-x)^n r$ の最大値

が成立するが、

$$p(1-x)^n x^2 \text{ の最大値を } p_n$$

$$q(1-x)^n x \text{ の最大値を } q_n$$

$$(1-x)^n r \text{ の最大値を } r_n$$

とすると

$$e_n \leq p_n + q_n + r_n$$

が成立するが、

(1)の結果より $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$

また $(1-x)^n r \leq (1-0)^n r = r$ から $r_n = r$ なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n + q_n + r_n) = 0 + 0 + r = r$$

となるのではさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = r \quad \cdots \text{答}$$

[V]

2つの円C,Dの共通接線はy軸に平行でないので、求める共通接線の方程式を $y=sx+t$ とおくと、これが円C, 円Dと接することから

$$\frac{|5\sqrt{3}s+t|}{\sqrt{s^2+1}}=5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{|-4\sqrt{3}s+t|}{\sqrt{s^2+1}}=4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立。①, ②から、

$$4|5\sqrt{3}s+t|=5|-4\sqrt{3}s+t|$$

が成立。これより、

(i) $4(5\sqrt{3}s+t)=5(-4\sqrt{3}s+t)$ のとき、

$$t=40\sqrt{3}s$$

となり、これと①とで、

$$5\sqrt{s^2+1}=|45\sqrt{3}s|$$

$$\Leftrightarrow s^2+1=243s^2$$

$$\Leftrightarrow s=\pm\frac{1}{11\sqrt{2}}$$

このとき、 $t=\pm\frac{20\sqrt{6}}{11}$ (複号同順)

(ii) $4(5\sqrt{3}s+t)=5(4\sqrt{3}s-t)$ のとき、

$$t=0$$

となり、これと①とで、

$$5\sqrt{s^2+1}=|5\sqrt{3}s|$$

$$\Leftrightarrow s^2+1=3s^2$$

$$\Leftrightarrow s=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

以上から共通接線の方程式は、

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$y=\pm\frac{1}{11\sqrt{2}}x\pm\frac{20\sqrt{6}}{11} \quad (\text{複号同順})$$

となるが、問題の設定から、

(1) 直線 ℓ の方程式は、 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x$ …答

(2) 直線 m の方程式は、 $y=\frac{1}{11\sqrt{2}}x+\frac{20\sqrt{6}}{11}$ …答

(3)

$$\ell: x-\sqrt{2}y=0$$

$$\ell': x+\sqrt{2}y=0$$

$$m: x-11\sqrt{2}y+40\sqrt{3}=0$$

3直線 ℓ, ℓ', m までの距離が等しい点を (X, Y) とすると、

$$\frac{|X-\sqrt{2}Y|}{\sqrt{3}}=\frac{|X+\sqrt{2}Y|}{\sqrt{3}}=\frac{|X-11\sqrt{2}Y+40\sqrt{3}|}{\sqrt{243}} \quad \cdots \ast$$

が成立。前の2式について、

$$X-\sqrt{2}Y=X+\sqrt{2}Y$$

のときは $Y=0$ となり、これは2円C,Dの中心である。

よって

$$X-\sqrt{2}Y=-X-\sqrt{2}Y$$

のときを考えると、 $X=0$ となることから

※の後ろ2式より、

$$\frac{|\sqrt{2}Y|}{\sqrt{3}}=\frac{|-11\sqrt{2}Y+40\sqrt{3}|}{\sqrt{243}}$$

$$\Leftrightarrow |9\sqrt{2}Y|=|-11\sqrt{2}Y+40\sqrt{3}|$$

よって、

$$9\sqrt{2}Y=-11\sqrt{2}Y+40\sqrt{3} \quad \text{から、} Y=\sqrt{6}$$

$$9\sqrt{2}Y=11\sqrt{2}Y-40\sqrt{3} \quad \text{から、} Y=10\sqrt{6}$$

以上より、y座標が小さい方の円をE, 大きい方の円をE'とすると、

$$E(0, \sqrt{6}), E'(0, 10\sqrt{6})$$

となり、つまりx座標は0である …答

※(2)(3)の絶対値の処理であるが、円の中心の存在する領域と正領域・負領域の考え方から処理もできるが時間がかかり面倒なので大まかな場合わけで行うのがより実践的である。

(4)

Eの半径は、点 $(0, \sqrt{6})$ と ℓ の距離を計算することで、

$$\frac{|0-\sqrt{2}\times\sqrt{6}|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2 \quad \cdots \text{答}$$

E'の半径は、点 $(0, 10\sqrt{6})$ と ℓ の距離を計算することで、

$$\frac{|0-\sqrt{2}\times 10\sqrt{6}|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2}}=\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=20 \quad \cdots \text{答}$$

