

数 学

(問 題)

2007年度

〈2007 H19010111〉

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は2～3ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 問1、問2、問3、問4の全問を解答すること。
4. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。コンパス、定規は使用してもよい。
5. 受験番号および氏名は、試験が始まってから、解答用紙の所定欄（2か所）に正確に記入すること。受験番号の記入にあたっては、次の数字見本に従うこと。

数 字 見 本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

6. 試験終了の指示がでたら、すぐに解答をやめて筆記具を置くこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
7. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

問1 空間内に異なる3点 O, A, B があり, それらは一直線上にない。点 O を始点とし, 終点をそれぞれ A, B とするベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ とするとき, 次の各問に答えよ。解答欄に答のみ記入せよ。

(1) A, B を通る直線 ℓ のベクトル方程式を, $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。ただし, 直線 ℓ 上の任意の点を P, かつ, $\vec{OP} = \vec{p}$ とし, 媒介変数を t とせよ。

(2) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とし, ベクトル $\vec{p}$ と直線 ℓ が直交するとする。このとき, $\vec{p}$ を, $\vec{a}, \vec{b}$ および θ を用いて表せ。

(3) (2) の条件のもとで, P が線分 AB を 12:7 に内分するとき, 角 θ を求めよ。

問2 a, b が有理数のとき,

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0 \quad \dots\dots\dots (A)$$

であれば, $a = b = 0$ であることを証明する。空欄を埋め, 証明を完成せよ。空欄にあてはまる最も簡単な数を解答欄に記入せよ。

(証明) $b \neq 0$ と仮定すると, (A) と

$$-\frac{a}{b} = \boxed{\text{ア}} \quad \dots\dots\dots (B)$$

は同値である。(B) の左辺は有理数であるから,

$$\boxed{\text{ア}} = \frac{n}{m} \quad \dots\dots\dots (C)$$

とおくことができる。ただし, m, n は正の整数で, m と n の最大公約数は1である。

(C) の両辺を2乗して整理すると,

$$\boxed{\text{イ}} m^2 = \boxed{\text{ウ}} n^2 \quad \dots\dots\dots (D)$$

となる。したがって, m^2 は $\boxed{\text{ウ}}$ の倍数となるから, m も $\boxed{\text{ウ}}$ の倍数である。そこで, $m = \boxed{\text{ウ}} \ell$ (ただし, ℓ は正の整数) と表すと, (D) より, $\boxed{\text{エ}} \ell^2 = n^2$ となる。したがって, n^2 は $\boxed{\text{エ}}$ の倍数であり, n も $\boxed{\text{エ}}$ の倍数である。よって, m も n も $\boxed{\text{ウ}}$ の倍数となり, m と n の最大公約数が1であることに矛盾する。したがって, $b = 0$ が得られた。このとき, (A) より $a = 0$ であるから, $a = b = 0$ である。(証明終わり)

問3 a を, $a > \frac{1}{2}$ をみたす定数とする。 $1 \leq x \leq 2a$ のとき,

$$y = \left(\log_2 \frac{x}{a} \right) \left(\log_2 \frac{x^2}{a^2} \right)$$

の最大値と最小値を求めよ。

問4 表が出る確率が p ($0 < p < 1$), 裏が出る確率が $q = 1 - p$ のコインがある。このコインを投げ、表と裏が裏・表の順に出るまで投げ続ける試行を考える。 $x = pq$ とおくとき、次の各問に答えよ。(1), (2) は答のみ解答欄に記入せよ。

(1) 確率 p がいろいろな値をとるとき、 x のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $p^2 + q^2$, $p^4 + q^4$ をそれぞれ x で表せ。

(3) 試行がちょうど7回で終了する確率 y を x で表せ。

(4) y を最大にする x の値を求めよ。

[以 下 余 白]